Е. Д. ТОМИЛОВ

Теоретическая МЕХАНИКА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТОМСК – 1970

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. В. КУЙБЫШЕВА

Е. Д. ТОМИЛОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ 2

КУРС ЛЕКЦИЙ

ДЛЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ УНИВЕРСИТЕТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ТОМСК — 1970

Редакторы — проф. П. П. Куфарев, А. М. Гришин

Индекс 2-2-3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Д. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 30. Принцип виртуальных перемещений 4
§ 31. Равновесие гибкой нерастяжимой нити 34

Е. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Глава I

Общие теоремы динамики системы 44
§ 32. Теорема о количестве движения системы 44
§ 33. Теорема о моменте количества движения системы . . . 57
§ 34. Теорема кинетической энергии системы 76

Глава II

Уравнения движения системы материальных точек 87

§ 35. Принципы Даламбера и Даламбера — Лагранжа . . . 87
§ 36. Уравнения движения голономных систем 92
§ 37. Уравнения движения неголономных систем 105

Глава III

Динамика абсолютно твердого тела 125
§ 38. Моменты инерции 125
§ 39. Применение общих теорем динамики к твердому телу . . 139
§ 40. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси . . . 151
§ 41. Движение твердого тела параллельно неподвижной плоскости 160
§ 42. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки . . . 163
§ 43. Вращение тяжелого твердого тела около неподвижной точки . 176

Глава IV

Некоторые вопросы аналитической механики 200
§ 44. Устойчивость равновесия и малые движения системы . . . 200
§ 45. Устойчивость движения 221
§ 46. Канонические уравнения 239
§ 47. Вариационные принципы механики 259
§ 48. Канонические преобразования 281

Ж. ТЕОРИЯ УДАРА

§ 49. Удар материальной точки 293
§ 50. Удар системы и твердых тел 301
Литература 316

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общая характеристика данного курса дана в предисловии к первой части книги. Основным содержанием данной, второй, части является динамика системы материальных точек; кроме того, рассматриваются важнейшие сведения из аналитической статики и теории удара.

Как и первая, эта часть представляет собой изложение курса лекций по теоретической механике, читаемого автором в Томском университете, и предлагается для использования в качестве учебника на механико-математических и физико-математических факультетах университетов.

Сделанные в предисловии к первой части замечания о порядке нумерации формул остаются в силе и для второй части.

Автор выражает свою признательность старшему научному сотруднику НИИ прикладной математики и механики при ТГУ Л. В. Комаровскому, профессору Новосибирского электротехнического института П. М. Алабужеву и доценту того же института Ю. П. Цивинскому, взявшими на себя большой труд по составлению отзыва на вторую часть книги.

Большая помощь была оказана автору редактором всего издания ныне покойным профессором Томского университета П. П. Куфаревым, беседы с которым имели немалое значение для характера изложения материала курса.

Д. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 30. Принцип виртуальных перемещений

1. Введение. Этим отделом мы начинаем изложение механики произвольной системы материальных точек.

В отличие от геометрической статики, занимающейся установлением условий равновесия одного абсолютно твердого тела, в аналитической статике изучается равновесие любого числа таких тел и вообще любой системы материальных точек. Такая общность задачи, стоящей перед аналитической статикой, приводит к тому, что в ней основное значение имеют аналитические методы, чему этот отдел обязан своим названием.

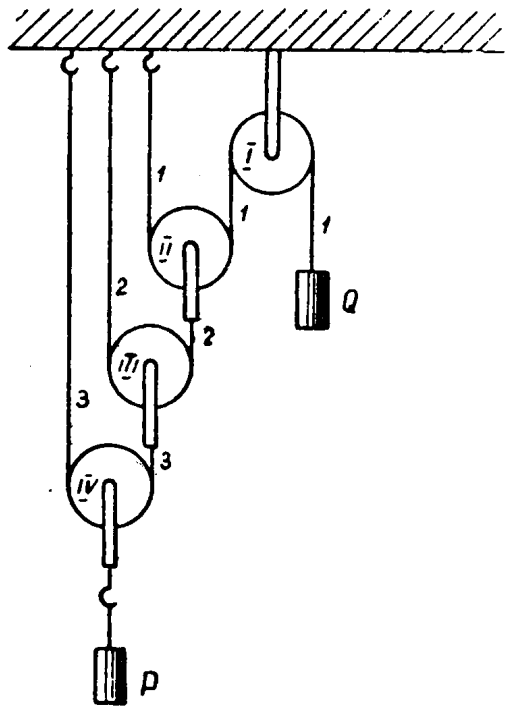
В основе аналитической статики лежит особый принцип, называемый *принципом виртуальных перемещений.* Для лучшего понимания этого принципа рассмотрим кратко некоторые исторические сведения.

2. Историческая справка. Некоторые исследователи находят зачатки принципа виртуальных перемещений еще у Аристотеля. Однако первым, кто пришел к ясной формулировке частной формы этого принципа, был голландский ученый Стевин (конец XVI века), изучавший условия работы полиспастов, то есть системы блоков, предназначенных для поднятия грузов с помощью охватывающих блоки веревок (нитей).

Рассмотрим, например, систему блоков, изображенную на фиг. 116, поддерживающую два груза с весами P и Q. Найдем соотношение между весами грузов при равновесии, считая нити нерастяжимыми и пренебрегая массами блоков и нитей. Направленная вниз сила $\boldsymbol{Q}$ вызывает со стороны нити *I* реакцию $\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{Q}$, направленную вверх. Если, поэтому, мысленно рассечь эту нить в каком-либо месте и отбросить одну часть, то для удержания в равновесии другой части нужно приложить как раз силу $\boldsymbol{T}$, действующую вдоль нити в сторону отброшенной части. Эта сила называется натяжением нити.

Так как блок *II* поддерживается двумя ветвями нити *I*, то на него будет действовать направленная вверх сила

с модулем $2T = 2Q$. Следовательно, при равновесии такая же сила должна действовать на этот блок и вниз со стороны нити *2*. Поэтому натяжение в нити *2* будет иметь величину $2Q$. Таким же путем убедимся, что в нити *3* будем



Фиг. 116

иметь натяжение $4Q$. В результате блок *IV* будет поддерживаться двумя такими силами, откуда следует, что

$$P = 8Q.$$

Стевин подметил, что к этому соотношению можно прийти и другим путем. Придадим одному из грузов, например грузу Q, некоторое воображаемое перемещение h по вертикали вниз. Тогда длина части нити *1*, охватывающей блок *II*, сократится на h, а длина каждой ее ветви — на $h/2$. Поэтому центр блока *II* поднимется вверх на $h/2$. Повторяя аналогичные рассуждения далее, найдем, что центр блока *III* поднимется вверх на $h/4$, а центр блока *IV*, а вместе с ним и груз P — на $h/8$.

Подсчитаем произведенную грузами работу и приравняем ее нулю. Работа силы $\boldsymbol{Q}$ есть

$$Qh,$$

а силы $\boldsymbol{P}$ —

$$-P\frac{h}{8}.$$

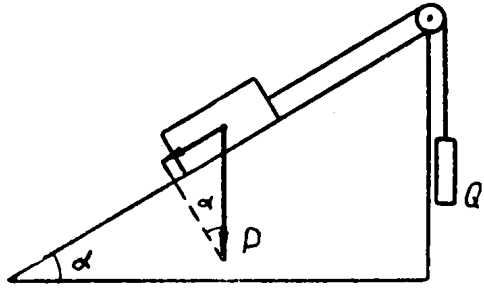
Поэтому приходим к уравнению

$$h\left(Q-\frac{1}{8}P\right)=0,$$

откуда при $h\neq 0$ имеем снова

$$P=8Q.$$

То же свойство для сил тяжести подметил и Галилей при рассмотрении простейших машин, в частности двух уравновешивающихся грузов, один из которых P расположен на гладкой наклонной плоскости (фиг. 117), а другой Q



Фиг. 117

подвешен на нити, привязанной к грузу P и перекинутой через блок. Обозначая угол наклона плоскости к горизонту через α, имеем, что составляющая веса первого груза $P\sin\alpha$ по направлению плоскости должна уравновешиваться силой Q, так что при равновесии будет

$$Q=P\sin\alpha.$$

Придадим теперь системе воображаемое перемещение, не нарушающее наложенных на нее связей, и примем, что совершаемая на этом перемещении работа сил веса грузов равна нулю. Тогда, если h есть перемещение груза P вниз по наклонной плоскости, получим:

$$h(P\sin\alpha-Q)=0,$$

откуда находим то же уравнение равновесия

$$Q=P\sin\alpha.$$

Позднее Иоган Бернулли заметил, что тот же прием может быть применен и в том случае, когда груз P лежит на произвольной поверхности, если только придавать этому грузу весьма малое воображаемое перемещение; в самом деле, элемент поверхности, по которому происходит такое перемещение, можно рассматривать принадлежащим наклонной плоскости, касательной к поверхности.

Применение этого метода можно найти также в работах других ученых XVIII века. Однако только Лагранж первым дал его теоретическое обоснование и притом для любых приложенных сил, а не только для сил тяжести. Указанные воображаемые элементарные перемещения стали называть *виртуальными перемещениями*, а равенство нулю работы активных сил на этих перемещениях — *принципом виртуальных перемещений* или *принципом Лагранжа*. В дальнейшем Фурье, Ампер и Пуассон дали новые более полные доказательства принципа, расширив число видов связей, при которых он справедлив.

3. Понятие о виртуальных перемещениях. Рассмотрим подробнее понятие о виртуальных перемещениях. Из предыдущего видно, что под виртуальным перемещением понимается элементарное перемещение точки, не нарушающее наложенных на нее связей, или, как говорят, совместимое со связями. В остальном же это перемещение совершенно произвольно. Виртуальное перемещение точки можно рассматривать как некоторое изменение радиуса-вектора этой точки; будем обозначать его символом $\delta \boldsymbol{r}$.

Возможное действительное элементарное перемещение $d\boldsymbol{r}$ точки тоже должно быть совместимо со связями. Однако виртуальное перемещение имеет два существенных различия от действительного.

1) Действительное перемещение $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$ какой-либо точки всегда единственное, определяемое вектором скорости $\boldsymbol{v}$ точки в данный момент. Перемещение же $\delta \boldsymbol{r}$ есть любое воображаемое элементарное перемещение, которое можно придать точке при единственном условии сохранения действия связей. Поэтому оно не единственно, и обычно можно указать бесконечное множество таких перемещений. Например, при движении точки по поверхности виртуальными перемещениями явятся все элементарные перемещения, лежащие в касательной плоскости, проведенной через положение точки в данный момент.

2) Действительные перемещения происходят во времени, так что $d\boldsymbol{r}$ есть перемещение точки за время dt. Виртуальное же перемещение, как воображаемое, можно совсем не связывать с изменением времени. Как будет видно из дальнейшего, оказалось более плодотворным считать при рассмотрении этого перемещения время не изменяющимся.

Подытоживая сказанное, можем дать такое определение: *виртуальным перемещением материальной точки называется любое воображаемое элементарное перемещение, совместимое с наложенными связями и рассматриваемое при неизменном времени.*

Совокупность виртуальных перемещений всех точек системы называется виртуальным перемещением системы.

Понятие о виртуальном перемещении можно получить и из других соображений. Пусть мы имеем какую-либо функцию времени (или, вообще, любой другой независимой переменной)

$$q = q(t).$$

Тогда выражение

$$dq = \dot{q}dt,$$

то есть главная линейная часть изменения функции, возникающего вследствие приращения аргумента функции на величину dt, называется, как известно, дифференциалом функции. Записанная формула определяет изменение функции только при достаточно малых значениях dt; в частности, если dt бесконечно мало, то бесконечно малым будет и dq.

Наряду с этим, можно рассматривать другое изменение функции, возникающее вследствие очень малого изменения самого вида функциональной зависимости и рассматриваемое при неизменном значении аргумента. Такое изменение носит название *вариации* функции. Так, если составить функцию

$$q^*(t) = q(t) + \varepsilon\eta(t),$$

где ε — произвольно малое постоянное число, а $\eta(t)$ — любая дифференцируемая функция, то выражение

$$\delta q = q^*(t) - q(t) = \varepsilon\eta(t)$$

будет являться вариацией функции $q(t)$.

Положение точки мы определяем векторной функцией времени

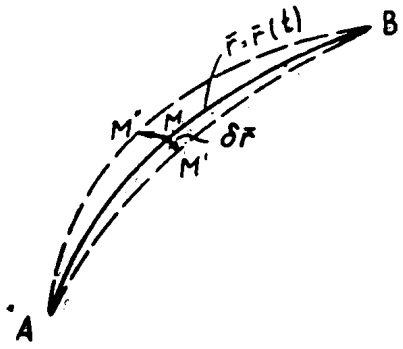
$$r = r(t). \qquad \text{(a)}$$

Так как виртуальное перемещение точки δr есть элементарное изменение этой функции при неизменном времени, то виртуальное перемещение есть вариация радиуса-вектора точки. Геометрически это можно представить так. Выражение (a) можно рассматривать как векторное уравнение траектории точки при ее перемещении из положения A в некоторое другое положение B (фиг. 118). Пусть возможными траекториями точки, совместимыми с наложенными связями, являются также траектории

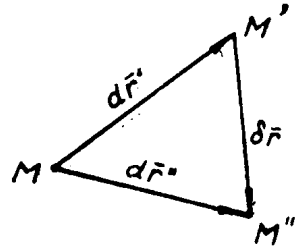
$$r^* = r^*(t), \qquad \text{(b)}$$

близкие к истинной траектории; две из них показаны на фиг. 118 пунктиром. Предположим также, что закон движения (b) таков, что какому-либо положению точки M на действительной траектории соответствуют отвечающие тому же моменту времени близкие положения на каждой из допустимых траекторий (например, положения M' и M''). Тогда элементарные изменения радиуса-вектора точки типа $\overline{MM'}$, $\overline{MM''}$ и явятся виртуальными перемещениями δr точки.

Рассмотрим один пример виртуального перемещения. Пусть dr есть элементарное действительное перемещение точки, происходящее за время dt из положения точки M, отвечающего моменту t



Фиг. 118



Фиг. 119

(фиг. 119). Пусть, далее, возможным, то есть совместимым со связями, перемещением точки за то же время является и перемещение dr^*. Конечные положения точки M' и M'' при этих перемещениях окажутся отвечающими одному и тому же моменту времени $t+dt$. Тогда, даже при меняющихся со временем связях при условии непрерывности их изменения, вектор $\delta r=\overline{M'M''}$ явится элементарным перемещением точки, совместимым со связями и рассматриваемым без изменения времени, то есть он окажется виртуальным перемещением.

В соответствии со сказанным о вариации функции, проекции виртуального перемещения точки на оси декартовых координат δx, δy, δz называются вариациями координат точки.

4. Связи системы. Как и в случае одной точки, связи, которым подчинено движение несвободной системы материальных точек, могут налагать некоторое ограничение как на положения, так и на скорости точек системы. Эти ограничения приводят к некоторым условиям, которым должны удовлетворять во все время движения координаты

точек, а также возможно и первые производные от них, и которые называются уравнениями связей.

Условимся в дальнейшем через n обозначать число точек системы; через $i\,(i=1, 2, \ldots, n)$ — номер точки, снабжая этим индексом все величины, относящиеся к данной точке ($\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор точки, $\boldsymbol{v}_i$ — вектор ее скорости и т. д.). Наряду с этим для сокращения записей будем пользоваться общей нумерацией координат и других скалярных величин, обозначая, например, через x_1, x_2, x_3 координаты первой точки, через x_4, x_5, x_6 — координаты второй и т. д. Число всех координат обозначим через N, поэтому при движении системы в пространстве $N=3n$, а в плоском движении $N=2n$. Переменный индекс при этой нумерации будем обозначать через ν ($\nu=1, 2, \ldots, N$).

Классификация связей остается совершенно такой же, как и для одной материальной точки (см. § 26, п. 1).

Условие, налагаемое на систему какой-либо голономной реономной удерживающей связью, называемое, как мы сказали, уравнением связи, имеет общий вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{N-2}, x_{N-1}, x_N, t)=0.$$

Будем ради краткости такое уравнение записывать в виде

$$f(x, t)=0,$$

понимая под x все координаты системы.

Если реономная удерживающая связь будет неголономной, то ее уравнение будет

$$f(x, \dot{x}, t)=0,$$

где под $\dot{x}$ понимаются производные по времени от координат всех точек системы. При этом связь называется неголономной только в том случае, когда отвечающее ей уравнение не вытекает из уравнений имеющихся голономных связей. Отсюда следует, что неголономные связи налагают на скорости точек системы такие условия, которые нельзя проинтегрировать. По этой причине неголономные связи называются еще неинтегрируемыми, а условия, получающиеся дифференцированием по времени уравнений голономных связей, рассматриваются как следствия этих уравнений и не относятся к уравнениям неголономных связей.

Если система свободна или подчинена только геометрическим (голономным) связям, то она сама называется голономной, в противном же случае, когда имеется хотя бы одна кинематическая (неголономная) связь, — неголономной.

Пример 1. Неизменяемый стержень длины l совершает плоское движение и притом так, что скорость средней его точки во все время движения направлена по стержню.

Положение стержня в любой момент времени можно определить положением его концов; обозначим радиусы-векторы и координаты этих концов через $\boldsymbol{r}_1(x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{r}_2(x_2, y_2)$. Условие неизменяемости длины стержня дает уравнение геометрической связи

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Положение средней точки стержня определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1),$$

а ее скорость есть

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{\boldsymbol{r}}_1).$$

Условие для этой скорости дает

$$\boldsymbol{v}_C = \kappa(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

где κ — скалярный множитель, а $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ — вектор, направленный по стержню. Приравнивая друг другу полученные значения $\boldsymbol{v}_C$, приходим к равенству:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{\boldsymbol{r}}_1 = 2\kappa(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

которое после проектирования на оси координат и исключения κ дает условие

$$\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{y_2 - y_1}.$$

Так как это условие не интегрируется, то оно представляет собой уравнение кинематической связи. Таким образом, данная система будет неголономной, подчиненной одной голономной и одной неголономной связи.

Пример 2. Круглый диск радиуса a катится без скольжения по прямой. Если эту прямую принять за ось x, а перпендикуляр к ней за ось y, то равенство нулю скорости точки P касания диска с прямой дает два условия: $\dot{x}_P = 0$, $\dot{y}_P = 0$. В то же время скорость точки P складывается из скорости центра диска C, направленной по оси x, и скорости от вращения диска вокруг C, направленной противоположно оси x. Поэтому $\dot{x}_P = \dot{x}_C - a\dot{\varphi}$, $\dot{y}_P = \dot{y}_C$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения диска. Получающиеся таким путем дифференциальные соотношения

$$\dot{x}_C - a\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{y}_C = 0$$

оба интегрируются, и мы приходим к двум конечным уравнениям

$$x_C - a\varphi = \text{const}, \quad y_C = \text{const} = a,$$

говорящим о том, что данная система будет голономной, подчиненной двум геометрическим связям.

Как и для одной материальной точки, уравнение неудерживающей связи имеет вид неравенства, например:

$$\varphi(x, t) \geqslant 0$$

или

$$\varphi(x, t) \leqslant 0.$$

Часто, однако, это уравнение записывают в виде равенства:

$$\varphi(x, t) = c,$$

где во все время движения c сохраняет определенный знак, обращаясь в нуль только в те моменты времени, в которые система приходит на связь.

5. Условия, налагаемые связями на виртуальные перемещения. Установим условия, налагаемые связями на виртуальные перемещения для того случая, когда система голономна, то есть подчинена только голономным связям. Если эти связи удерживающие, то их уравнения будут:

$$f_j(x, t) = 0; \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa). \tag{1}$$

Придадим системе какое-либо виртуальное перемещение. Так как оно совместимо со связями, то получающиеся при этом перемещении значения координат должны удовлетворять уравнениям (1), то есть

$$f_j(x + \delta x, t) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa).$$

Вычитанием находим:

$$\delta f_j \equiv f_j(x + \delta x, t) - f_j(x, t) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa).$$

Стоящая в левой части разность называется вариацией функции f_j. Записывая эту вариацию подробно, аналогично записи полного дифференциала, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa). \tag{2}$$

Это будут условия, налагаемые на виртуальные перемещения удерживающими связями.

Если система свободна, то уравнения (1), а следовательно и условия (2) будут отсутствовать, и в этом случае вариации координат совершенно произвольны и независимы между собой. Если же система несвободна и подчинена (1), то условия (2) делают κ вариаций координат зависящими от остальных $N-\kappa$ вариаций, которые только и будут независимыми.

Число независимых вариаций координат называется числом степеней свободы системы. Это является наиболее общим определением. Таким образом, число степеней свободы системы, подчиненной κ удерживающим связям, есть

$$s = N - \kappa.$$

В силу уравнений (1) число независимых координат тоже равно этому числу s, поэтому, как и для одной точки, в рассматриваемом случае голономных связей число степеней свободы совпадает с числом независимых координат.

Так как истинное движение системы тоже подчиняется уравнениям (1), то связи налагают условия и на действи-

тельные элементарные перемещения точек системы. Эти условия найдутся из того соображения, что функции f_j остаются постоянными во все время движения (равными нулю), так что

$$df_j = 0$$

или подробно

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \kappa). \tag{3}$$

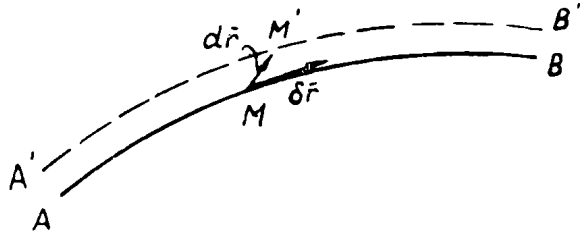
Как видим, в случае реономных связей условия (3), вообще говоря, отличаются от условий (2), и поэтому действительные элементарные перемещения не будут совпадать ни с какими из виртуальных перемещений.

Иначе обстоит дело при склерономных связях. В этом случае функции f_j не зависят явно от t,

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0,$$

и условия (3) принимают тот же вид, что и условия (2). Это означает, что при склерономных связях действительное элементарное перемещение системы совпадает с одним из виртуальных.

Пусть, например, материальная точка M движется по поверхности, для которой в плоскости чертежа в момент t есть линия AB (фиг. 120). Так как при виртуальных пере-



Фиг. 120

мещениях время считается неизменным, то реономную связь следует рассматривать как мгновенно остановившуюся. Поэтому виртуальные перемещения точки δr будут любыми элементарными перемещениями, лежащими в касательной плоскости к поверхности, независимо от того, является связь склерономной или реономной. При реономной связи действительное перемещение за время dt есть вектор $dr = \overline{MM'}$, переводящий точку в ее положение M' на поверхности $A'B'$, в которую перейдет поверхность AB в момент $t + dt$. Ясно, что в этом случае вектор dr не

будет вообще лежать в касательной плоскости и, следовательно, не совпадет ни с одним из виртуальных перемещений. Наоборот, если связь склерономна, то есть неподвижна, то вектор $d\boldsymbol{r}$, как лежащий в касательной плоскости, обязательно совпадет с одним из векторов $\delta\boldsymbol{r}$.

Рассмотрим еще тот случай, когда система подчинена не только удерживающим связям (1), но также и неудерживающим.

$$\varphi_h(x, t) = c_h \ (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{4}$$

Неудерживающие связи ограничивают движение системы только в те моменты времени, в которые система приходит на данную связь и для которых в уравнениях (4) следует считать $c_h = 0$. Однако, при придании системе виртуальных перемещений данными связями будут допускаться как неосвобождающие от связей перемещения, когда $\delta c_h = 0$, так и освобождающие, при которых δc_h не обращается в нуль, принимая тот же знак, что и c_h. Поэтому варьирование уравнений (4) дает условия

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = \delta c_h \ (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{5}$$

Таким образом, в данном случае виртуальные перемещения оказываются связанными κ условиями (2) и l условиями (5); следовательно, система будет иметь

$$s = N - (\kappa + l)$$

степеней свободы.

Установленное выше свойство действительных элементарных перемещений совпадать с одним из виртуальных при склерономных связях будет, очевидно, справедливым и при неудерживающих связях.

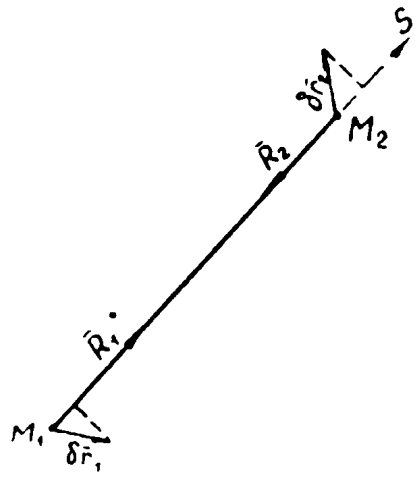
6. Идеальные связи. Для одной материальной точки, а также для абсолютно твердого тела мы называли какую-либо связь идеальной, если реакция связи нормальна к ней. Нетрудно видеть, что в случае системы материальных точек такое определение годится не для всякой связи.

Возьмем, например, систему, состоящую из двух материальных точек M_1 и M_2 (фиг. 121), соединенных между собой идеальным, то есть нерастяжимым и не имеющим массы, стержнем. С помощью этой связи каждая из точек воздействует на другую, поэтому реакции стержня $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ явятся в то же время силами взаимодействия точек; следовательно, по закону равенства действия и противодействия, они направлены по стержню противоположно друг другу. Как видим, здесь нельзя указать никакой поверхности или линии, к которой эти реакции были бы нормальны.

Можно, однако, дать другое определение идеальности связи, легко распространяемое на всякую систему материальных точек. Для этого воспользуемся тем, что для одной точки, движущейся по поверхности или линии, ее виртуальные перемещения δr касательны к связи, и, следовательно, для идеальной связи они окажутся перпендикулярными к реакции связи R, так что

$$R \cdot \delta r = 0.$$

Если же некоторая поверхность служит неудерживающей связью, то точка, приходя на связь, оказывает давление на нее и вызывает реакцию, направленную в ту область, откуда пришла точка и куда она снова может сойти. Следовательно, при идеальности такой связи виртуальное перемещение составляет с направлением реакции острый или в крайнем случае прямой угол, что дает



Фиг. 121

$$R \cdot \delta r \geqslant 0. \qquad \text{(а)}$$

Легко получить обратное положение, то есть если условие (а) выполнено, то связь идеальна. Для доказательства достаточно принять во внимание, что δr есть любое виртуальное перемещение. Если при выполнении условия (а) связь окажется неидеальной, то есть ее реакция не будет нормальна к связи, то всегда найдется такое виртуальное перемещение, которое составит с реакцией тупой угол, так что для этого перемещения $R \cdot \delta r < 0$. А так как это противоречит условию (а), то предположение о неидеальности связи должно быть отброшено.

Полученный результат обобщают на систему материальных точек в виде следующего положения: *связи системы называются идеальными в том и только в том случае, когда элементарная работа реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равняется нулю для связей удерживающих и не меньше нуля для связей неудерживающих.* Таким образом, для идеальных связей

$$\sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \geqslant 0^*), \qquad (6)$$

где знак равенства отвечает удерживающим связям; для неудерживающих же связей знак неравенства имеет место при освобождающих перемещениях, а знак равенства — при неосвобождающих. При этом под $\boldsymbol{R}_i$ понимается равнодействующая реакций всех связей, действующих на данную точку системы.

Когда, например, каждая из точек системы движется по идеально гладкой поверхности, то виртуальная работа каждой реакции $\boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$ равна нулю и условие (6) выполняется. Однако для идеальности связей системы не обязательно каждый член левой части формулы (6) должен равняться нулю или быть больше него; важно лишь, чтобы суммарная виртуальная работа реакций удовлетворяла этому условию.

Теперь мы можем оценить характер связи, представленной на фиг. 121. С наложенной на точки M_1 и M_2 связью совместимы такие виртуальные перемещения $\delta \boldsymbol{r}_1$ и $\delta \boldsymbol{r}_2$, которые дают одинаковые проекции $(\delta \boldsymbol{r}_1)_s$ и $(\delta \boldsymbol{r}_2)_s$ на направление s, связанное со стержнем, ибо иначе стержень изменил бы свою длину. Тогда, пользуясь равенствами

$$R_1 = R_2, \ (\delta \boldsymbol{r}_1)_s = (\delta \boldsymbol{r}_2)_s,$$

находим для работы реакций:

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = R_1 (\delta \boldsymbol{r}_1)_s - R_2 (\delta \boldsymbol{r}_2)_s = 0.$$

Следовательно, удерживающая связь в виде нерастяжимого стержня, связывающего точки данной системы, является идеальной связью.

7. Принцип виртуальных перемещений. *Для того, чтобы система материальных точек, подчиненная идеальным связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа активных сил на любом виртуальном перемещении системы равнялась нулю для связей удерживающих и была бы не больше нуля для связей неудерживающих.*

Предположим, что система находится в равновесии. Тогда для каждой точки системы справедливо уравнение равновесия

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (а)$$

где $\boldsymbol{F}_i$ — равнодействующая активных сил, а $\boldsymbol{R}_i$ — равнодействующая реакций связей. Придадим системе какое-либо виртуальное перемещение, при котором каждая точка системы получит некоторое перемещение $\delta \boldsymbol{r}_i$. Умножим каж-

*) Для сокращения записей при суммировании по точкам системы или по ее координатам будем обычно опускать указание на индексы суммирования i или ν у знака Σ.

дое из уравнений (а) скалярно на это перемещение и результат просуммируем по всем точкам системы. Получим уравнение:

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

В силу идельности связей, согласно (6), имеем

$$\sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \geqslant 0,$$

следовательно,

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \leqslant 0, \tag{7}$$

где знак равенства отвечает связям удерживающим, а также связям неудерживающим при неосвобождающих перемещениях, знак же неравенства — при освобождающих от неудерживающих связей перемещениях. Тем самым необходимость принципа доказана.

Докажем теперь обратное положение, то есть, что при активных силах, удовлетворяющих условию (7), система будет находиться в равновесии. При доказательстве ограничимся случаем склерономных связей. Будем исходить из противного, допуская, что при выполнении (7) система не находится в равновесии. В таком случае, если в начальный момент система находилась в покое, активные силы приведут ее в движение, сообщив каждой точке системы за элементарный промежуток времени dt некоторое действительное перемещение $d\boldsymbol{r}_i$. Это перемещение будет направлено по равнодействующей приложенных к точке активных сил и реакций связей; поэтому все эти силы совершат за время dt положительную работу, равную

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{R}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i > 0. \tag{b}$$

При склерономных связях действительное перемещение голономной системы совпадает с одним из виртуальных, так что для него должно выполняться условие (6) идеальности связей, в котором, однако, нужно сделать одно существенное изменение. В самом деле, при сходе какой-либо точки системы с неудерживающей связи реакция этой связи обратится в нуль, и поэтому при применении формулы (6) к действительному перемещению системы мы должны отбросить все члены этой формулы, отвечающие освобождающим от связи перемещениям. Следовательно, знак неравенства в этой формуле исчезнет, и мы будем иметь:

$$\sum \boldsymbol{R}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = 0. \tag{8}$$

Следовательно, неравенство (b) может быть переписано в виде

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i > 0.$$

Пользуясь опять тем же совпадением действительного перемещения системы с одним из виртуальных, можем утверждать, что в силу последнего неравенства должно существовать такое виртуальное перемещение системы, для которого

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0.$$

Тем самым мы пришли к противоречию с исходным условием (7), справедливым для любого виртуального перемещения системы. Поэтому наше допущение об отсутствии равновесия неверно, и система находится в равновесии.

Представляя скалярное произведение в различных формах, можем уравнение принципа записать в одном из следующих видов:

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leqslant 0;$$

$$\sum X_\nu \delta x_\nu \leqslant 0;$$

$$\sum F_i \cos \varphi_i \, | \delta \boldsymbol{r}_i | \leqslant 0,$$

где φ_i — угол между силой $\boldsymbol{F}_i$ и перемещением $\delta \boldsymbol{r}_i$.

8. Применение принципа к конкретным задачам. Можно указать два основных метода решения задач статики с помощью данного принципа. Рассмотрим их, ограничиваясь случаем удерживающих связей, когда уравнение принципа можно взять в виде

$$\sum X_\nu \delta x_\nu = 0. \tag{9}$$

а. *Метод декартовых координат.* Уравнения удерживающих связей

$$f_j(x, t) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa) \tag{1}$$

налагают на виртуальные перемещения точек системы, как мы видели, κ условий вида:

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa). \tag{2}$$

Разрешая эти условия относительно произвольно выбранных зависимых вариаций координат и подставляя полученные выражения в (9), получим равенство, содержащее только независимые вариации, линейное и однородное относительно этих вариаций. Это равенство, в силу независимости оставшихся вариаций, должно выполняться при

любых значениях вариаций, то есть оно должно быть тождеством относительно этих вариаций. Поэтому коэффициенты при каждой из вариаций должны обратиться в нуль, и мы таким путем получаем систему $s = N - \kappa$ уравнений, служащую вместе с уравнениями (1) для решения данной задачи.

b. *Метод независимых координат.* Поскольку, согласно уравнениям (1), число независимых координат есть $s = N - \kappa$, положение системы можно определить любыми s независимыми параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_s$, в функции от которых можно выразить все N координат системы; таким образом, будем иметь

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$$

или короче

$$x_\nu = x_\nu(q, t). \qquad \text{(a)}$$

Уравнения связей (1) не должны давать каких-либо зависимостей для координат q, поэтому при подстановке выражений (a) в эти уравнения они должны обратиться в тождества $0 \equiv 0$. Отсюда следует, что записанная явная зависимость декартовых координат от t будет иметь место только в случае реономных связей; если же уравнения связей не содержат явно время t, то есть если связи склерономны, то и декартовы координаты не будут явно зависеть от t.

Варьируя функции (a), находим:

$$\delta x_\nu = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} \delta q_r.$$

Подставляя эти выражения в уравнение принципа (9) и меняя порядок суммирования, находим:

$$\sum_{r=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} \right) \delta q_r = 0.$$

Так как на вариации δq_r не наложено никаких условий, то все они независимы, а поэтому совершенно произвольны. Следовательно, коэффициент при каждой вариации равен нулю, и мы получаем систему s уравнений, из которой и находим решение задачи.

Пример 1. По сторонам прямого угла, расположенного в вертикальной плоскости (фиг. 122), могут скользить без трения два тяжелых шарика M_1 и M_2 с весами P_1 и P_2, связанные между собой нерастяжимым стержнем. Найти значение угла ψ при равновесии системы, если угол α стороны OM_1 с горизонтом известен.

Решим пример обоими вышеуказанными методами.

Примем стороны угла за оси координат x, y. Координаты точки M_1 обозначим через x_1, y_1 и точки M_2 — через x_2, y_2. Учитывая, что точка M_1 находится на оси x, а M_2 на оси y, получаем уравнения связей

$$f_1 \equiv y_1 = 0, \qquad f_2 \equiv x_2 = 0.$$

Кроме того, неизменность длины стержня дает еще одно уравнение:

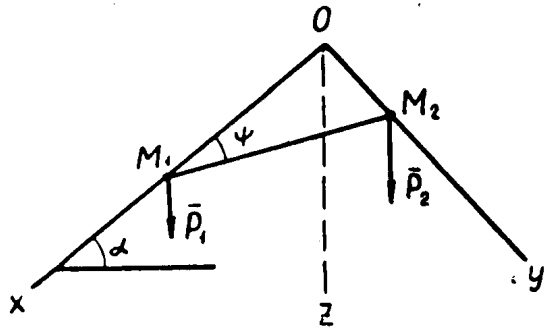
$$f_3 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0,$$

где $l = \text{const}$ — длина стержня. Это уравнение, с учетом двух первых, можно переписать в виде

$$f_3 \equiv x_1^2 + y_2^2 - l^2 = 0.$$

Наличие трех уравнений связей говорит о том, что число независимых координат равно единице; поэтому мы получим лишь одно уравнение равновесия.

Уравнение принципа (9) в данном случае будет



Фиг. 122

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Для проекций активных сил имеем:

$$X_1 = P_1 \sin\alpha, \qquad Y_1 = P_1 \cos\alpha, \qquad X_2 = P_2 \sin\alpha, \qquad Y_2 = P_2 \cos\alpha.$$

Составляя условия (2), то есть варьируя уравнения связей, находим:

$$\delta y_1 = 0, \qquad \delta x_2 = 0, \qquad x_1\delta x_1 + y_2\delta y_2 = 0.$$

Принимая за независимую вариацию δx_1, получаем из последнего условия

$$\delta y_2 = -\frac{x_1}{y_2}\delta x_1.$$

Подставляя проекции сил и значения зависимых вариаций в уравнение (b), приходим к равенству

$$\left(P_1 \sin\alpha - P_2 \cos\alpha \cdot \frac{x_1}{y_2}\right)\delta x_1 = 0.$$

Приравнивание нулю коэффициента при независимой вариации дает

$$P_1 \sin\alpha - P_2 \cos\alpha \cdot \frac{x_1}{y_2} = 0. \qquad \text{(c)}$$

Из чертежа задачи имеем:

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{OM_1}{OM_2} = \operatorname{ctg}\psi.$$

Подставляя это значение в (c), находим ответ задачи:

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{P_1}{P_2}\operatorname{tg}\alpha.$$

В соответствии с установленным выше числом независимых координат, при решении задачи методом независимых координат нам нужно положение системы определить одним каким-либо параметром. Естественно взять в качестве такого параметра искомый угол ψ. Тогда будем иметь:

$$x_1 = l\cos\psi, \qquad y_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad y_2 = l\sin\psi,$$

откуда

$$\delta x_1 = -l\sin\psi\delta\psi, \qquad \delta y_1 = 0, \qquad \delta x_2 = 0, \qquad \delta y_2 = l\cos\psi\delta\psi.$$

Подставляя эти значения, а также выражения проекций сил в (b), приходим к уравнению

$$(-P_1 l\sin\alpha\sin\psi + P_2 l\cos\alpha\cos\psi)\,\delta\psi = 0.$$

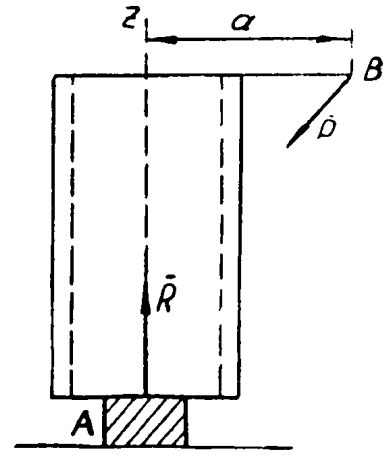
Приравнивая коэффициент при $\delta\psi$ нулю, получаем:

$$-P_1\sin\alpha\sin\psi + P_2\cos\alpha\cos\psi = 0,$$

откуда находим то же решение.

Пример 2. Принцип виртуальных перемещений находит большое применение в так называемых простых машинах, то есть в механизмах, обладающих одной степенью свободы. Придавая произвольное малое изменение единственному параметру, определяющему положение машины, придем к одному уравнению равновесия.

В качестве примера рассмотрим винтовой пресс, схематически представленный на фиг. 123. Допустим, что перпендикулярная к оси z винта сила $\boldsymbol{P}$, приложенная в точке B на расстоянии a от оси, завинчивает пресс, сжимая некоторое тело A. Тогда со стороны тела A на пресс будет действовать реакция $\boldsymbol{R}$, направленная вдоль оси. Единственное элементарное перемещение, допускаемое связями, есть поворот пресса вокруг оси z на угол $\delta\varphi$. При этом повороте сила $\boldsymbol{P}$ произведет работу $Pa\,\delta\varphi$.



Фиг. 123

Подсчитаем далее виртуальную работу силы $\boldsymbol{R}$. Пусть h—шаг винта; тогда, считая пресс абсолютно твердым, найдем, что модуль перемещения пресса по оси z, отвечающий его повороту на угол $\delta\varphi$, найдется из пропорции

$$\frac{|\delta z|}{h} = \frac{\delta\varphi}{2\pi},$$

откуда

$$|\delta z| = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi.$$

Поэтому работа силы R будет

$$R\delta z = -R\frac{h}{2\pi}\delta\varphi.$$

Уравнение принципа примет вид:

$$Pa\,\delta\varphi - R\frac{h}{2\pi}\delta\varphi = 0,$$

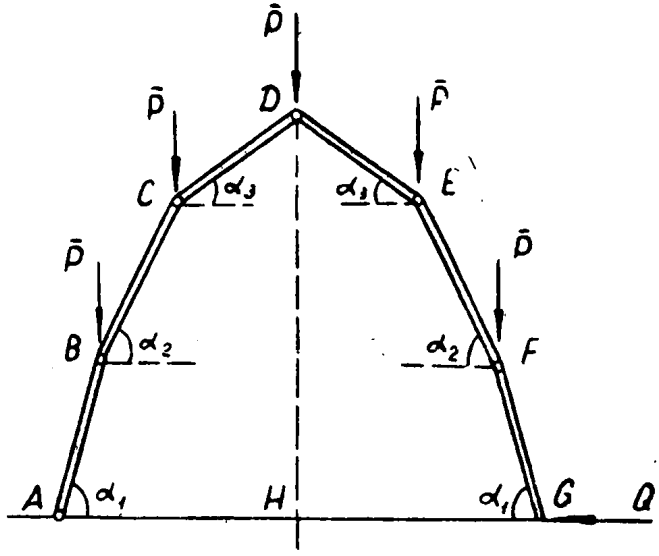
откуда

$$P = \frac{h}{2\pi a}R.$$

Этот результат говорит о том, что для получения заданного сжимающего усилия R меньшей силой P выгодно уменьшать шаг винта и увеличивать расстояние a.

Пример 3. Система из шести одинаковых соединенных шарнирами стержней расположена в вертикальной плоскости симметрично относительно вертикали DH (фиг. 124). Конец A первого стержня закреплен шарнирно, а конец G последнего стержня опирается на идеально гладкий пол. К шарнирам B, C, D, E и F приложены одинаковые вертикальные силы $\boldsymbol{P}$, а в точке G—горизонтальная сила $\boldsymbol{Q}$. Определить углы α_i (i=1,2,3) при равновесии системы.

Возьмем координатные оси x и y с началом в A. Силы $\boldsymbol{P}$ имеют проекции только на ось y, а сила $\boldsymbol{Q}$ — только на ось x. Придавая системе та-



Фиг. 124

кое виртуальное перемещение, при котором сохраняется ее симметрия относительно вертикали DH, можем уравнение принципа записать в виде

$$P_y(2\delta y_B + 2\delta y_C + \delta y_D) + Q_x \delta x_G = 0.$$

Обозначая длину каждого стержня через l и принимая за независимые координаты искомые углы, будем иметь:

$$y_B = l\sin\alpha_1, \qquad y_C = l(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2), \qquad y_D = l(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)$$

$$x_G = 2l(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3).$$

Отсюда

$$\delta y_B = l\cos\alpha_1, \qquad \delta y_C = l(\cos\alpha_1\delta\alpha_1 + \cos\alpha_2\delta\alpha_2);$$

$$\delta y_D = l(\cos\alpha_1\delta\alpha_1 + \cos\alpha_2\delta\alpha_2 + \cos\alpha_3\delta\alpha_3);$$

$$\delta x_G = -2l(\sin\alpha_1\delta\alpha_1 + \sin\alpha_2\delta\alpha_2 + \sin\alpha_3\delta\alpha_3).$$

Имеем также

$$P_y = -P, \qquad Q_x = -Q.$$

Подставляя все эти значения в уравнение принципа, сокращая l и объединяя члены с одинаковыми вариациями, получаем:

$$(-5P\cos\alpha_1+2Q\sin\alpha_1)\,\delta\alpha_1+(-3P\cos\alpha_2+2Q\sin\alpha_2)\,\delta\alpha_2+$$
$$+(-P\cos\alpha_3+2Q\sin\alpha_3)\,\delta\alpha_3=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях в силу независимости последних, получим три уравнения равновесия, из которых найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{5P}{2Q};\qquad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{3P}{2Q};\qquad \operatorname{tg}\alpha_3=\frac{P}{2Q}.$$

Видим, что независимо от значений сил P и Q тангенсы искомых углов находятся в отношении последовательных нечетных чисел $1:3:5$, если начать с $\operatorname{tg}\alpha_3$. Этот результат обобщается на систему любого числа $2n$ стержней при аналогичной нагрузке; тем же путем получим:

$$\operatorname{tg}\alpha_n:\operatorname{tg}\alpha_{n-1}:\ldots:\operatorname{tg}\alpha_2:\operatorname{tg}\alpha_1=1:3:\ldots:(2n-3):(2n-1).$$

9. Уравнения равновесия системы в декартовых координатах. С помощью принципа виртуальных перемещений можно получить уравнения равновесия общего вида, справедливые для любых задач статики.

Получим сначала уравнения равновесия в декартовых координатах. Пусть система подчинена удерживающим связям с уравнениями

$$f_j(x,\ t)=0\ \ (j=1,\ 2,\ldots,\ \kappa) \tag{1}$$

и неудерживающим — с уравнениями

$$\varphi_h(x,\ t)=c_h\ \ (h=1,\ 2,\ldots,\ l), \tag{4}$$

где c_h, как было сказано, может принимать для данной связи лишь значение вполне определенного знака.

Уравнение принципа виртуальных перемещений возьмем в виде

$$\sum X_\nu\delta x_\nu=\delta\pi, \tag{10}$$

где $\delta\pi\leqslant 0$.

Условия, налагаемые связями на виртуальные перемещения, имеют, как мы видели, вид:

$$\sum\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\delta x_\nu=0\ \ (j=1,\ 2,\ldots,\ k); \tag{2}$$

$$\sum\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu}\delta x_\nu=\delta c_h\ \ (h=1,\ 2,\ldots,\ l). \tag{5}$$

Для получения уравнений равновесия применим метод, называемый методом множителей Лагранжа. Именно, умножим каждое условие (2) на произвольный множитель λ_j, а каждое условие (5) — на произвольный множитель μ_h. Результаты умножения сложим между собой, а также с уравнением принципа (10). Собирая члены с одинаковыми вариациями координат, придем к уравнению:

$$\sum\left(X_\nu+\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}+\sum_{h=1}^{l}\mu_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu}\right)\delta x_\nu=\delta\pi+\sum_{h=1}^{l}\mu_h\delta c_h. \tag{a}$$

Произвольных множителей λ_j и μ_h в этом равенстве будет $\kappa + l$, то есть как раз столько, сколько имеется зависимых вариаций. Можно поэтому так выбрать эти множители, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях обратились в нуль. В самом деле, если за зависимые вариации принять $\kappa + l$ первых вариаций, то такой выбор эквивалентен отысканию решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$X_\nu + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \kappa + l).$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, есть якобиан

$$\Delta = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_\kappa, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{\kappa+l})}.$$

В силу независимости всех функций f_j и φ_h между собой этот якобиан обязательно отличен от нуля, и поэтому система уравнений дает единственное решение для λ_j и μ_h.

Таким образом, в уравнении (а) останутся лишь члены с независимыми вариациями, коэффициенты при которых, а также свободный член уравнения, тоже равны нулю в силу полной произвольности оставшихся вариаций.

В итоге получаем следующие уравнения равновесия системы:

$$X_\nu + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \qquad (11)$$

или в более подробной записи:

$$\left.\begin{aligned} X_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} = 0; \\ Y_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i} = 0; \\ Z_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_i} = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

Эти уравнения содержат $N + \kappa + l$ неизвестных координат и множителей Лагранжа. Присоединяя к ним еще $\kappa + l$ уравнений связей (1) и (4) (при $c_h = 0$), получаем полную систему $N + \kappa + l$ уравнений, необходимую для отыскания всех неизвестных.

Установим еще, что дает равенство нулю свободного члена уравнения (а)

$$\delta\pi + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \delta c_h = 0.$$

Полагая, что виртуальные перемещения являются неосвобождающими для всех неудерживающих связей кроме какой-то одной с фиксированным номером h, мы должны считать отличной от нуля лишь отвечающую этому номеру величину δc_h. Тогда последнее равенство примет вид

$$\delta\pi + \mu_h \delta c_h = 0.$$

Так как $\delta\pi < 0$, то отсюда имеем $\mu_h \delta c_h > 0$. Следовательно, в силу одинаковости знаков δc_h и c_h, каждый множитель μ_h имеет один знак с соответствующим c_h. Это позволяет при решении задач отбрасывать лишние значения множителей μ_h, не отвечающие этому выводу.

Уравнения (11′) можно переписать в векторной форме:

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \operatorname{grad}_i f_j + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \operatorname{grad}_i \varphi_h = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (12)$$

где индекс i у градиента указывает на то, что градиент составляется по координатам i-й точки. Эти уравнения равновесия не изменятся, если какую-либо связь f_j отбросить и одновременно к действующим силам присоединить силу $\lambda_j \operatorname{grad}_i f_j$. Следовательно, по аксиоме связей, эта сила является реакцией связи $f_j = 0$. Аналогично убедимся, что $\mu_h \operatorname{grad}_i \varphi_h$ является реакцией связи $\varphi_h = c_h$. Таким образом, в уравнениях (11) или (11′) отдельные члены суммы представляют собой проекции на оси координат реакций соответствующих связей, действующих на данную точку системы, а знание значений множителей λ_j и μ_h позволяет найти эти реакции.

Пример. Тяжелая материальная точка с массой, равной единице, может двигаться внутри идеально гладкого конуса

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 0$$

с вертикальной осью Oz (фиг. 125). Кроме силы тяжести на точку действует сила отталкивания от вершины конуса, пропорциональная расстоянию от нее ($F = \kappa r$). Найти положение равновесия точки на поверхности конуса.

В данном примере имеем одну неудерживающую связь

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = c, \quad (b)$$

где $c \leqslant 0$.

Векторное уравнение равновесия точки (12) будет

$$\kappa \boldsymbol{r} + \boldsymbol{g} + \mu \operatorname{grad}\varphi = 0.$$

В проекциях на оси координат имеем:

$$\kappa x + \frac{1}{2}\mu x = 0,$$

$$\kappa y + 2\mu y = 0,$$

$$\kappa z - g - 2\mu z = 0$$

или

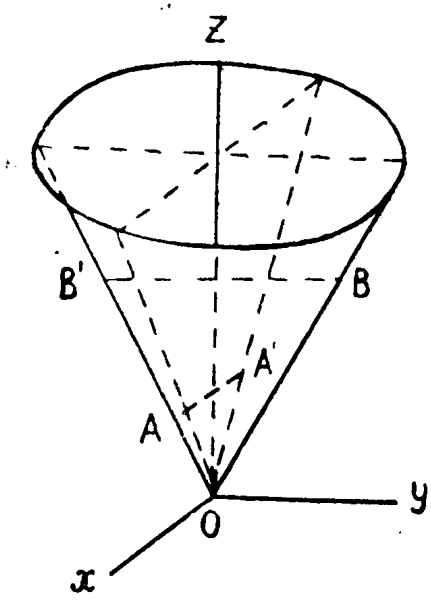
$$\left.\begin{aligned} &\left(\kappa + \frac{1}{2}\mu\right) x = 0, \\ &(\kappa + 2\mu)\, y = 0, \\ &(\kappa - 2\mu)\, z - g = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

К этим уравнениям нужно присоединить уравнение (b) при $c = 0$. Уравнения (c) имеют три решения:

1) $$\mu = -2\kappa, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{g}{\kappa - 2\mu} = \frac{g}{5\kappa};$$

2) $$x_2 = 0, \quad \mu = -\frac{\kappa}{2}, \quad z_2 = \frac{g}{2\kappa};$$

3) $$x_3 = 0, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = \frac{g}{\kappa - 2\mu}.$$



Фиг. 125

В третьем решении $z_3 \neq 0$, поэтому уравнение (b) не удовлетворяется и это решение следует отбросить. Для остальных же решений из (b) находим:

$$x_1 = \pm 2z_1 = \pm \frac{2g}{5\kappa},$$

$$y_2 = \pm z_2 = \pm \frac{g}{2\kappa}.$$

Так как для обоих решений $\mu < 0$, что дает совпадение знаков μ и c, то оба решения будут иметь место в действительности. Поэтому положениями равновесия будут некоторые указанные на фиг. 125 положения A, A' и B, B'.

10. Уравнения равновесия системы в независимых координатах. Обобщенные силы. При наличии неудерживающих связей, подстановка выражений декартовых координат через независимые должны обращать в тождества уравнения этих связей так же, как и уравнения удерживающих связей. Поэтому декартовы координаты выразятся формулами

$$x_\nu = x_\nu (q, c, t),$$

где имеются в виду все c_h, входящие в уравнения (4), а число независимых координат есть $s = N - (\kappa + l)$, где κ — число уравнений (1), l — число уравнений (4).

Вариации координат примут в этом случае вид:

$$\delta x_\nu = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} \delta q_r + \sum_{h=1}^{l} \frac{\partial x_\nu}{\partial c_h} \delta c_h.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10) и меняя порядок суммирования, придем к равенству;

$$\sum_{r=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} \right) \delta q_r + \sum_{h=1}^{l} \left(\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial c_h} \right) \delta c_h = \delta \pi \qquad \text{(a)}$$

Если ввести обозначения

$$Q_r = \sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right), \qquad (13)$$

$$C_h = \sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial c_h} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_h} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial c_h} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial c_h} \right),$$

то уравнение (а) можно переписать в виде

$$\sum_{r=1}^{s} Q_r \delta q_r = \delta \pi - \sum_{h=1}^{l} C_h \delta c_h. \qquad \text{(b)}$$

В силу независимости вариаций δq_r отсюда получаем уравнения равновесия системы в независимых координатах

$$Q_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (14)$$

Рассуждая так же, как и при выводе уравнений в декартовых координатах, находим из равенства нулю свободного члена уравнения (b), что каждое C_h должно иметь знак, противоположный знаку c_h.

Введенные нами величины Q_r носят название *обобщенных сил*, отвечающих соответствующим координатам q_r.

Из предыдущего рассмотрения вытекает, что при удерживающих связях, а также при неосвобождающих от неудерживающих связей виртуальных перемещениях, работа активных сил системы на этих перемещениях равна

$$\delta A = \sum_{r=1}^{s} Q_r \delta q_r. \qquad (15)$$

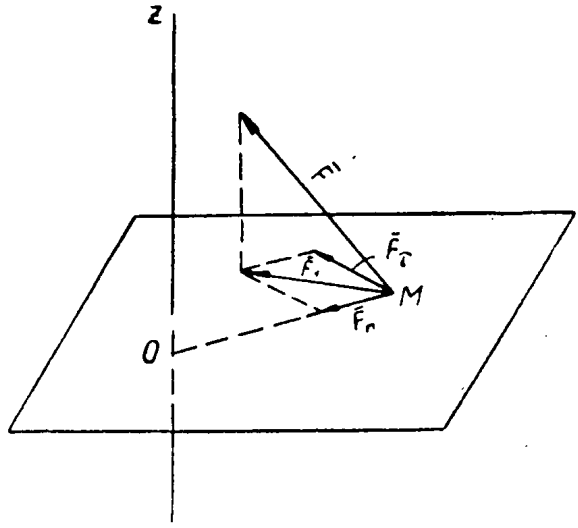
Поэтому обобщенные силы могут определяться не только по формулам (13), но также и путем непосредственного составления выражения работы δA из условий задачи при придании независимым параметрам вариаций δq_r; тогда коэф-

фициенты при этих вариациях, согласно (15), и явятся соответствующими обобщенными силами.

Например, при вращении тела вокруг неподвижной оси единственным параметром, определяющим его положение, является угол поворота φ, а виртуальным перемещением любой точки тела явится величина $r\delta\varphi$, где r — расстояние точки от оси вращения. Если на тело действует активная сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в некоторой его гочке, то ее виртуальная работа будет

$$\delta A = F_\tau r \delta\varphi,$$

где F_τ — проекция силы на направление перемещения точки. Для получения F_τ проектируем силу $\boldsymbol{F}$ на плоскость, проходящую через точку M приложения силы (фиг. 126) и нор-



Фиг. 126

мальную к оси вращения; полученную составляющую $\boldsymbol{F}_1$ разлагаем на две: $\boldsymbol{F}_n$ — направленную по MO, и $\boldsymbol{F}_\tau$ — перпендикулярную к отрезку $OM = r$. Применяя теорему Вариньона о моменте равнодействующей, и учитывая, что момент составляющей $\boldsymbol{F}_n$ относительно оси равен нулю, находим, что,

$$F_\tau r = L_z,$$

где L_z — момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси. Таким образом, в данном случае

$$\delta A = L_z \delta\varphi,$$

и, следовательно, обобщенная сила Q_φ будет

$$Q_\varphi = L_z.$$

Из размерности работы вытекает, что если данная независимая координата имеет размерность длины, то отвечающая ей обобщенная сила будет иметь размерность силы, а если эта координата есть какой-то угол, то обобщенная сила будет иметь размерность работы или момента силы.

Пример. Рассмотрим ту же задачу, что и в п. 8 (фиг. 122). Мы видели, что

$$X_1 = P_1 \sin\alpha, \quad Y_1 = P_1 \cos\alpha, \quad X_2 = P_2 \sin\alpha, \quad Y_2 = P_2 \cos\alpha.$$

Беря за независимую координату по-прежнему искомый угол ψ, имеем:

$$x_1 = l\cos\psi; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad y_2 = l\sin\psi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial x_1}{\partial \psi} = -l\sin\psi; \quad \frac{\partial y_1}{\partial \psi} = \frac{\partial x_2}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial y_2}{\partial \psi} = l\cos\psi.$$

Обобщенная сила, отвечающая углу ψ, будет

$$Q_\psi = X_1\frac{\partial x_1}{\partial \psi} + Y_1\frac{\partial y_1}{\partial \psi} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial \psi} + Y_2\frac{\partial y_2}{\partial \psi}.$$

Подставляя значения входящих сюда величин, находим:

$$Q_\psi = -P_1 l\sin\alpha\sin\psi + P_2 l\cos\alpha\cos\psi.$$

Уравнение равновесия $Q_\psi = 0$ дает

$$-P_1\sin\alpha\sin\psi + P_2\cos\alpha\cos\psi = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{P_1}{P_2}\operatorname{tg}\alpha.$$

11. Применение принципа к определению реакций связей. Неидеальные связи. Хотя в уравнение принципа виртуальных перемещений реакции связей не входят, его можно использовать для определения этих реакций. С этой целью дают системе добавочную степень свободы, для чего отбрасывают рассматриваемую связь, заменяя ее действие реакцией, а затем придают системе какое-либо виртуальное перемещение, несовместимое с отброшенной связью. Так как в этом случае реакция этой связи играет роль некоторой активной силы, то ее работа на указанном перемещении тоже должна быть включена в уравнение принципа. Это и позволит найти реакцию данной связи. Перебирая таким образом связи, можем найти все их реакции. Покажем, как это делается, на примере.

Пример. На конце C невесомого бруска AC (фиг. 127) висит груз Q. Брусок опирается концом A на вертикальную стенку, а точкой B — на угол стола. Найти угол φ при равновесии системы, а также реакции опор A и B, если длина бруска есть $AC = a$, расстояние между стенкой и столом равно b, и связи идеальны.

При виртуальном перемещении системы работу производит только сила $\boldsymbol{Q}$. Так как $Q_y = -Q$, то эта работа равна $-Q\delta y_C$, если y_C — координата точки C. Поэтому уравнение принципа будет

$$\delta y_C = 0. \qquad \text{(a)}$$

Определяя положение системы параметром φ, найдем:

$$y_C = a \sin \varphi - b \operatorname{tg} \varphi.$$

Поэтому уравнение (a) примет вид

$$\left(a \cos \varphi - \frac{b}{\cos^3 \varphi}\right) \delta\varphi = 0,$$

что дает

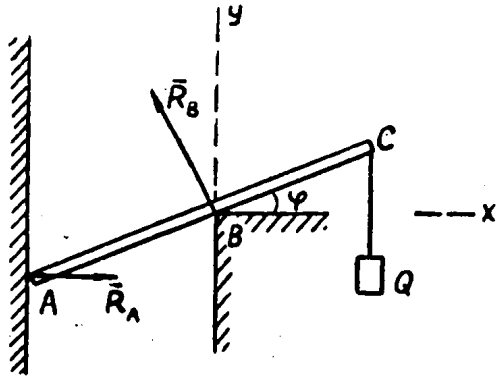
$$a \cos \varphi - \frac{b}{\cos^2 \varphi} = 0.$$

Отсюда

$$\cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \quad . \tag{b}$$

Это и определяет значение угла φ при равновесии.

Желая определить далее реакцию R_A, отбросим стенку и придадим системе какое-либо перемещение, не совместимое с этой связью, например,



Фиг. 127

перемещение δs бруска вдоль него от A к C. Тогда реакция R_A тоже произведет работу, и уравнение принципа будет

$$R_A \cos \varphi \cdot \delta s - Q \sin \varphi \cdot \delta s = 0,$$

откуда

$$R_A = Q \operatorname{tg} \varphi.$$

Если же отбросить опору B и придать системе перемещение в виде поворота вокруг точки A на угол $\delta\varphi$ по стрелке часов, то точки B и C испытают перемещения, нормальные к стержню и равные соответственно

$$AB \cdot \delta\varphi = \frac{b}{\cos \varphi} \delta\varphi, \quad a\delta\varphi.$$

Уравнение принципа в этом случае принимает вид:

$$\left(-R_B \frac{b}{\cos \varphi} + Q \cos \varphi \cdot a\right) \delta\varphi = 0,$$

откуда

$$R_B = Q \frac{a}{b} \cos^2 \varphi.$$

Так как

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1}, \quad ,$$

то, используя (b), можем окончательные выражения реакций получить в виде

$$R_A = Q\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3} - 1}, \qquad R_B = Q\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}.$$

Если связи системы не идеальны, то есть если в число реакций входят силы трения или вообще какие-то реакции, делающие связи неидеальными, то эти реакции выделяют особо. Так как остальные реакции будут удовлетворять условию (6) идеальности связей, то из вывода принципа следует, что, например, для удерживающих связей виртуальная работа активных сил и сил трения должна равняться нулю. Таким образом, в этом случае в уравнение принципа будет входить как работа активных сил, так и работа реакций, дающих отклонение связей от идеальности.

12. Потенциальное поле сил и принцип Торичелли. Установим, какой вид принимает принцип виртуальных перемещений в том случае, когда активные силы имеют потенциал U, то есть, когда

$$\boldsymbol{F}_i = \operatorname{grad}_i U$$

или

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{16}$$

Тогда виртуальная работа активных сил будет

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}_i U \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = \delta U$$

и уравнение принципа переходит в уравнение

$$\delta U = 0, \tag{17}$$

если связи будут удерживающими.

Этот результат говорит о том, что *для равновесия консервативной системы материальных точек, подчиненной идеальным удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы потенциал имел стационарное значение* (то есть максимум, минимум или так называемый минимакс, когда при выполнении условия (17) нет ни максимума ни минимума).

В данном случае в силу соотношений (16) формулы (13) для обобщенных сил принимают вид

$$Q_r = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}.$$

Так как потенциал зависит только от координат точек системы, а через них — от независимых координат q_r, то эти выражения можно переписать в простой форме:

$$Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, ..., s). \tag{18}$$

Поэтому уравнения (14) дают

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., s). \tag{19}$$

Такой вид принимают уравнения равновесия системы, находящейся под действием консервативных сил. Эти уравнения можно получить и непосредственно из (17), выражая функцию U в независимых координатах и записывая (19) как условия стационарности этой функции при равновесии.

Формулы (18) дают еще один способ определения обобщенных сил, применимый в рассматриваемом случае консервативных сил.

Пусть активными силами являются силы тяжести. Направим ось z вертикально вниз. Тогда проекции силы тяжести для каждой точки системы будут

$$X_i = Y_i = 0, \qquad Z_i = m_i g.$$

Эта сила имеет потенциал

$$U_i = m_i g z_i,$$

потенциалом же для всей системы будет

$$U = \sum U_i = g \sum m_i z_i = Mg z_c,$$

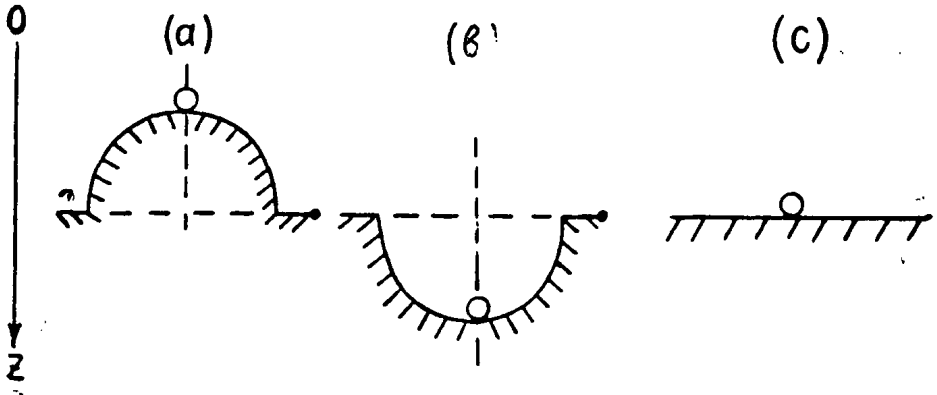
где z_c — вертикальная координата центра тяжести системы. Подставляя это выражение в (17), приходим к уравнению

$$\delta z_c = 0. \tag{20}$$

Получили равенство, выражающее следующий *принцип Торичелли: для равновесия системы материальных точек, находящейся под действием сил тяжести, необходимо и достаточно, чтобы вертикальная координата центра тяжести системы принимала стационарное значение.*

Фиг. 128 иллюстрирует этот принцип на примере тяжелого шарика, находящегося на внешней поверхности сферического купола, на дне сферической чаши или на плоскости. В положении (*a*) z_c имеет минимум, в (*b*) — максимум, а в (*c*) — минимакс, то есть нет ни минимума ни максимума, но все же $\delta z_c = 0$. Следовательно, во всех этих положениях шарик будет находиться в равновесии.

Заметим, что в этом разделе мы установили необходимые и достаточные условия всякого равновесия, не вдаваясь в его свойства. Из рассмотренного же примера видно, что равновесие системы может иметь различный характер. Так, при малейшем отклонении шарика от его наивысшего поло-



Фиг. 128

жения на фиг. (*a*) предоставленный самому себе шарик будет скатываться по поверхности купола, то есть начнет неограниченно удаляться от положения равновесия; в случае (*b*) при любом начальном отклонении шарик будет стремиться вернуться в положение равновесия и, предоставленный самому себе, придет в колебательное движение около этого положения; наконец, в случае (*c*) он останется в покое при любом отклонении. Поэтому положение (*a*) называется положением *неустойчивого* равновесия шарика, (*b*) — *устойчивого* и (*c*) — *безразличного*.

Практическое значение обычно имеют лишь положения устойчивого равновесия, неустойчивое же равновесие в технических конструкциях совершенно недопустимо. Поэтому важно установить общие признаки устойчивости или неустойчивости равновесия, что мы сделаем значительно позднее.

Пример. Однородный стержень длины $2a$ опирается концом A на вертикальную гладкую стену (фиг. 129), а также на точку O, по которой он может скользить без трения. Найти длину OA при равновесии стержня, если расстояние точки O от стены равно b.

Так как связи идеальны, а единственной активной силой, приложенной к стержню, является сила тяжести, то будет справедлив принцип Торичелли. Беря точку O за начало координат и направляя ось y вертикально вверх, будем иметь уравнение принципа

$$\delta y_c = 0, \qquad \text{(a)}$$

где y_c — координата центра тяжести C стержня. Вводя угол φ между стержнем и осью x, будем иметь

$$y_c = OC \cdot \sin\varphi.$$

Но

$$OC = AC - OA = a - \frac{b}{\cos\varphi},$$

Следовательно,

$$y_C = a\sin\varphi - b\operatorname{tg}\varphi.$$

Подставляя в (a), получаем

$$\left(a\cos\varphi - \frac{b}{\cos^2\varphi}\right)\delta\varphi = 0;$$

приходим к уравнению равновесия

$$a\cos\varphi - \frac{b}{\cos^2\varphi} = 0,$$

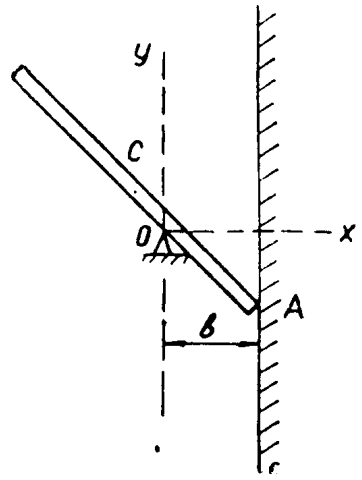
откуда

$$\cos^3\varphi = \frac{b}{a}. \qquad \text{(b)}$$

Это дает для искомой длины

$$OA = \frac{b}{\cos\varphi} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Из (b) следует, что $b \leqslant a$, поэтому $OA \leqslant a$. При этом при $b = a$, $\varphi = 0$ $OA = a$, точка C совпадает с O и стержень при равновесии занимает горизонтальное положение. С уменьшением b имеем $OA < a$; так как при наклоне стержня, при котором конец A окажется лежащим выше O, сила тяжести заставит стержень оторваться от стены, то при равновесии возможен только тот наклон, который указан на фиг. 129.



Фиг. 129

§ 31. Равновесие гибкой нерастяжимой нити

1. Гибкая нерастяжимая нить обладает свойствами:

a) она не оказывает сопротивления силам, сжимающим нить или действующим в поперечном к ней направлении;

b) расстояние между двумя точками нити, измеренное вдоль нити, остается неизменным при любых растягивающих силах, действующих на нить.

Когда концы нити закреплены тем или иным способом, она под действием активных сил и сил реакций связей примет форму определенной кривой, называемой *фигурой равновесия нити*.

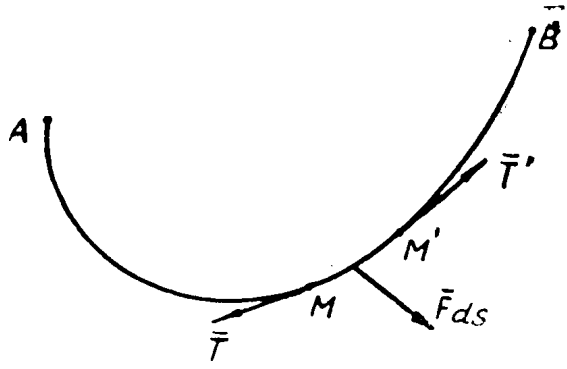
Если находящуюся в равновесии нить разрезать в некоторой точке M и отбросить одну часть нити, то для удержания в равновесии оставшейся части придется приложить

в точке M некоторую силу T, выражающую собой действие отброшенной части. По первому свойству эта сила может быть только растягивающей, поэтому она будет направлена по касательной к нити в сторону отброшенной части. Сила T называется натяжением нити в данной точке.

Основной задачей в вопросе о равновесии нити является задача об определении фигуры равновесия нити и натяжения в каждой ее точке. Как мы увидим, эта задача сводится к отысканию интегралов некоторой системы дифференциальных уравнений при заданных условиях закрепления концов нити. Чисто аналитический характер вопроса заставляет рассматривать равновесие нити не в элементарной, а в аналитической статике.

Мы, далее, ограничимся случаем свободной нити, когда нет никаких других связей кроме действующих на концах нити.

2. Уравнения равновесия нити. Допустим, что закрепленная в точках A и B (фиг. 130) нить находится в рав-



Фиг. 130

новесии под действием некоторых активных сил, приложенных ко всем точкам нити; пусть F есть сила, отнесенная к единице длины нити, меняющаяся в общем случае при переходе от одной точки нити к другой.

Обозначим через s дуговую координату, отсчитываемую вдоль нити от конца A. Произвольный элемент нити $ds = MM'$ окажется находящимся под действием трех сил: активной силы Fds и двух сил натяжения T и T', приложенных в точках M и M' соответственно и направленных по касательным к нити во внешнюю по отношению к ds сторону. Следовательно, условие равновесия выделенного элемента будет

$$Fds + T + T' = 0. \qquad \text{(a)}$$

Обозначим через τ орт касательной к нити, направленный в сторону возрастания s, а через T, как обычно, модуль натяжения T. Тогда выражения для натяжений можно записать в виде

$$T = -T\tau;$$

$$T' = (T + dT)(\tau + d\tau) = T\tau + \tau dT + T d\tau.$$

Подставляя эти значения в уравнение (а), получаем после деления на ds векторное уравнение равновесия нити

$$F + \frac{dT}{ds}\tau + T\frac{d\tau}{ds} = 0$$

или

$$F + \frac{d}{ds}(T\tau) = 0. \tag{1}$$

Вспоминая, что

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{n}{\rho},$$

где n — орт главной нормали к кривой, а ρ — радиус кривизны, можем уравнение равновесия записать также в форме

$$F + \frac{dT}{ds}\tau + \frac{T}{\rho}n = 0. \tag{2}$$

Как известно, проекции орта τ касательной к кривой на оси декартовых координат будут

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Поэтому уравнение (1) дает следующие дифференциальные уравнения равновесия нити в декартовых координатах:

$$\left.\begin{aligned} X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) &= 0, \\ Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) &= 0, \\ Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где X, Y, Z — проекции силы F на оси координат.

Проектированием уравнения (2) на оси естественного трехгранника кривой, по которой располагается нить, получаем естественные уравнения равновесия нити

$$\left.\begin{aligned} F_\tau + \frac{dT}{ds} &= 0, \\ F_n + \frac{T}{\rho} &= 0, \\ F_b &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где F_τ, F_n, F_b — проекции силы F соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль кривой.

Последнее уравнение говорит о том, что нить принимает такую фигуру равновесия, что в каждой ее точке вектор силы оказывается лежащим в соприкасающейся плоскости этой фигуры.

3. Интегрирование уравнений равновесия нити. Активная сила F может зависеть в общем случае не только от положения элемента ds на нити, но также и от его положения и направления в пространстве. Поэтому проекции этой силы X, Y, Z могут быть функциями от s, x, y, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Считая эти функции известными, видим, что уравнения (3) являются тремя дифференциальными уравнениями, содержащими четыре искомые функции x, y, z и T. Для составления полной системы уравнений присоединяем к ним уравнение

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \qquad (5)$$

выражающее квадрат модуля вектора τ.

Полученная система уравнений будет второго порядка относительно x, y, z и первого относительно T. Казалось бы, что общий интеграл системы (3), (5) должен содержать семь постоянных интегрирования, за которые можно, например, принять значения x, y, z, T, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ при некотором значении $s = s_0$. Однако в силу уравнения (5) эти постоянные будут связаны одним условием и поэтому общий интеграл системы будет содержать лишь шесть произвольных постоянных. Таким образом, общее решение системы будет:

$$x = x(s, C_1, C_2, \ldots, C_6);$$

$$y = y(s, C_1, C_2, \ldots, C_6);$$

$$z = z(s, C_1, C_2, \ldots, C_6);$$

$$T = T(s, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

Произвольные постоянные можно определить по условиям на концах нити. Так, если эти концы полностью закреплены, то, приравнивая значения координат при $s = 0$ и $s = l$, где l — длина нити, заданным координатам концов, получим для определения постоянных шесть уравнений. Если же закреплен лишь один конец, а другой может, например, скользить без трения по некоторой кривой, то на первом конце условия будут те же самые; на втором же два условия дадут уравнения кривой, которым должны удовлетворять координаты этого конца, а третье найдется из того, что в силу идеальности кривой направление натяжения нити в этой точке, а следовательно и самой нити, будет ортогонально к кривой.

4. Первые интегралы уравнений равновесия. В частных случаях легко можно получить первые интегралы уравнений равновесия нити. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

a. Потенциальное поле сил. Если $\boldsymbol{r}$ — переменный радиус-вектор точек нити относительно какого-либо начала отсчета, то элемент $\boldsymbol{dr}$ имеет модуль $|\boldsymbol{dr}| = ds$ и направлен по касательной к нити. Следовательно,

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{dr} = ds, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{dr} = 0.$$

Поэтому скалярное умножение уравнения (2) на $\boldsymbol{dr}$ дает

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} + dT = 0. \tag{а}$$

Пусть активные силы имеют потенциал U, так что

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U.$$

Так как в этом случае

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = dU,$$

то уравнение (а) принимает вид:

$$d(T + U) = 0,$$

откуда находим первый интеграл уравнений равновесия нити

$$T + U = h = \text{const}, \tag{б}$$

позволяющий исключить T из этих уравнений.

b. Силы, нормальные к нити. Пусть всюду вдоль нити сила $\boldsymbol{F}$ нормальна к нити. Тогда $F_\tau = 0$, и первое уравнение (4) переходит в уравнение

$$\frac{dT}{ds} = 0,$$

откуда следует, что в этом случае натяжение будет постоянно вдоль нити.

c. Параллельные силы. Обозначая через $\boldsymbol{F}^0$ единичный вектор общего направления сил, имеем

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{F}^0.$$

Умножим уравнение (1) векторно справа на F^0, тогда, имея в виду, что $F \times F^0 = 0$, получим

$$\frac{d}{ds}(T\tau) \times F^0 = 0,$$

что в силу постоянства вектора F^0 можно записать в виде

$$\frac{d}{ds}(T\tau \times F^0) = 0.$$

Отсюда находим:

$$T\tau \times F^0 = c,$$

где c — постоянный вектор. Из этого равенства вытекает, что плоскость векторов τ, F^0 в каждой точке нити будет нормальной к некоторому неизменному направлению в пространстве, откуда следует, что фигура равновесия нити будет плоской кривой, расположенной в плоскости, параллельной силам.

Примем эту плоскость за плоскость (xy), направляя ось y параллельно силам. Тогда $X = 0$, и первое уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

откуда получаем первый интеграл

$$T\frac{dx}{ds} = T_0 = \text{const}. \tag{7}$$

Так как $\frac{dx}{ds}$ есть косинус угла между вектором натяжения T и осью x, то полученный интеграл говорит о постоянстве проекции натяжения на ось x, причем постоянная интегрирования равна натяжению в той точке, где $\frac{dx}{ds} = 1$, то есть где касательная к нити параллельна оси x.

5. Цепная линия. Рассмотрим равновесие однородной нити, находящейся под действием сил тяжести. Обозначим через $\gamma = \text{const}$ вес единицы длины нити. Вследствие параллельности сил тяжести нить расположится в вертикальной плоскости. Эту плоскость примем за плоскость (xy), направляя ось y вертикально вверх. Тогда будет иметь место интеграл (7). Подставляя во второе уравнение (3)

$$Y = -\gamma,$$

получаем

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \gamma. \tag{a}$$

Умножая обе части равенства (7) на $\frac{dy}{dx}$, находим

$$T\frac{dy}{ds} = T_0\frac{dy}{dx}.$$

Поэтому из уравнения (а) имеем

$$d\left(T_0\frac{dy}{dx}\right) = \gamma ds = \gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Вводя обозначение

$$p = \frac{dy}{dx},$$

можем это уравнение переписать в виде

$$T_0\,dp = \gamma\sqrt{1+p^2}\,dx.$$

Разделяя переменные и полагая

$$\frac{T_0}{\gamma} = a, \tag{b}$$

имеем

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a} + C. \tag{c}$$

Проведем ось y через точку, где касательная к нити параллельна к оси x. Тогда для определения постоянной C будем иметь условие: при $x=0$ $p=0$. Подстановка в (с) этих данных дает $C=0$, и интеграл (с) будет

$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}} \tag{d}$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = e^{-\frac{x}{a}},$$

или, после освобождения от иррациональности в знаменателе,

$$-p+\sqrt{1+p^2} = e^{-\frac{x}{a}}. \tag{e}$$

Вычитая из (d) выражение (e), находим:

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

то есть

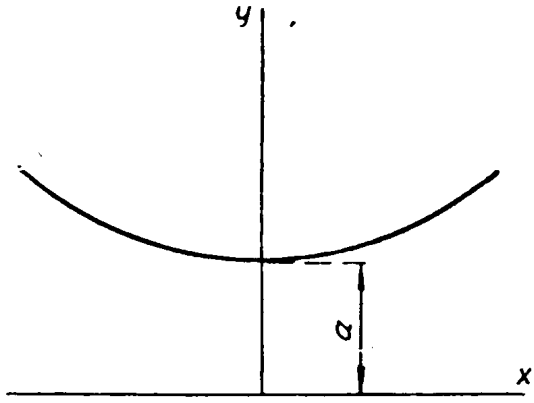
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a} + C'.$$

Выберем начало координат так, чтобы при $x = 0$ было бы $y = a$ (фиг. 131). Тогда $C' = 0$, и фигура равновесия нити будет иметь уравнение

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$



Фиг. 131

Это означает, что при равновесии нить расположится по цепной линии.

Так как силы тяжести имеют потенциал, то будет справедлив интеграл (6)

$$T + U = T_0 + U_0,$$

где U_0 — значение потенциала в той точке, где $T = T_0$, то есть при $x = 0$. В данном случае $U = -\gamma y$, поэтому имеем

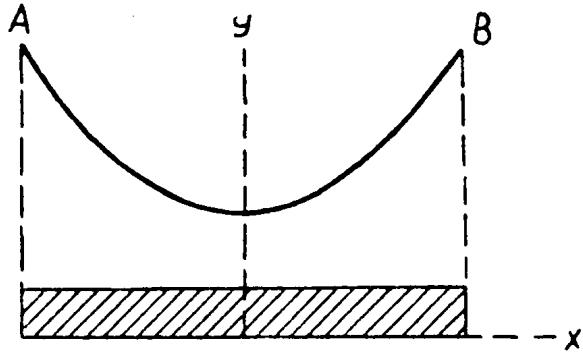
$$T - \gamma y = T_0 - \gamma a,$$

что в силу (b) дает

$$T = \gamma y.$$

Следовательно, натяжение нити в какой-либо ее точке равно весу отрезка нити длиной, равной ординате данной точки.

6. Параболическая нить. Пусть нить находится под действием вертикальных сил, равномерно распределенных по проекции нити на горизонтальную ось x (фиг. 132). Такой характер нагрузки встречается, например, в висячих мостах для цепей, поддерживающих мост. Силы



Фиг. 132

опять параллельны, и нить расположится в вертикальной плоскости: ось y направим вертикально вверх.

Тогда снова будет иметь место интеграл

$$T\frac{dx}{ds}=T_0. \tag{7}$$

На элемент ds нити будет действовать вертикально вниз сила γdx, где $\gamma=\text{const}$. Поэтому сила, отнесенная к единице длины нити, будет иметь на ось y проекцию в натуральную величину:

$$Y=-\gamma\frac{dx}{ds};$$

следовательно, второе уравнение (3) примет вид

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\gamma dx.$$

Но из (7), как и в предыдущей задаче, имеем

$$T\frac{dy}{ds}=T_0\frac{dy}{dx},$$

так что предыдущее уравнение можно представить в форме

$$d\left(T_0\frac{dy}{dx}\right)=\gamma dx.$$

Деля на $T_0 dx$ и опять применяя обозначение

$$a = \frac{T_0}{\gamma},$$

получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}.$$

Интегрирование дает

$$y = \frac{x^2}{2a} + C_1 x + C_2.$$

Следовательно, в данном случае нить расположится по параболе, уравнение которой при указанном на фиг. 132 выборе осей координат можно записать в виде

$$y = \frac{x^2}{2a} + b,$$

где b есть ордината вершины параболы.

Е. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Глава 1

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

§ 32. Теорема о количестве движения системы

1. Два деления сил системы и дифференциальные уравнения движения. Считая в общем случае систему материальных точек несвободной, можем приложенные к точкам системы силы разделить на активные $\boldsymbol{F}_i$ и пассивные или реакции связей $\boldsymbol{R}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Векторные уравнения движения отдельных точек запишутся тогда по второму закону Ньютона в виде

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

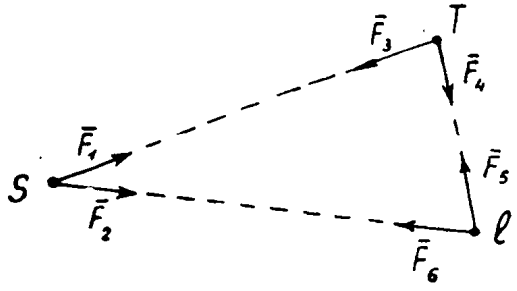
а в проекциях на оси координат —

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + R_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{2}$$

где $m_1 = m_2 = m_3$ — масса первой точки, $m_4 = m_5 = m_6$ — масса второй и т. д., и вообще при $\nu = 3i$ $m_{\nu-2} = m_{\nu-1} = m_\nu$ — масса точки с номером i; точно так же, как и для X_ν, силы $R_{\nu-2}$, $R_{\nu-1}$, R_ν при $\nu = 3i$ являются проекциями равнодействующей $\boldsymbol{R}_i$ реакций, действующих на i-ю точку.

Наряду с таким делением часто оказывается полезным применение деления сил системы по другому признаку. Именно, силы системы можно разделить еще на силы *внутренние* и силы *внешние*. К внутренним силам относятся силы взаимодействия между точками системы, а к внешним — те силы, которые выражают действие на точки системы со стороны тел, не принадлежащих к данной системе. Это деление носит условный характер и зависит от того, какие тела мы относим к системе. Рассмотрим, например, систему, состоящую из Солнца S (фиг. 133), Земли T и Луны L. Действующие между этими телами силы взаимного притяжения по закону всемирного тяготения будут внутренними силами этой системы. Однако, если мы возьмем систему, состоящую только из Земли и Луны, то внутренними окажутся лишь силы взаимодействия этих тел $\boldsymbol{F}_4$ и $\boldsymbol{F}_5$, а приложенные к этим телам силы $\boldsymbol{F}_3$ и $\boldsymbol{F}_6$ следует считать внешними, ибо они выражают действие на тела системы со стороны Солнца, не принадлежащего к рассматриваемой системе.

Будем равнодействующую внешних сил, действующих на данную точку системы, обозначать через $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$, а внутренних — через $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$ (верхние индексы — начальные буквы французских слов exterieur — внешний и interieur — внутренний), имея в дальнейшем в виду, что суммирование



Фиг. 133

по точкам системы, то есть по индексу i всегда будет относиться только к нижнему индексу у $F_i^{(i)}$. Тогда векторные уравнения движения точек системы можно взять в виде

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

а в проекциях на оси координат

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu^{(e)} + X_\nu^{(i)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{4}$$

с очевидным смыслом величин $X_\nu^{(e)}$ и $X_\nu^{(i)}$. При этом внешние и внутренние силы могут включать в себя как активные, так и пассивные силы.

Мы далее увидим, что реакции можно выразить с помощью уравнений связей. Поэтому, если известны активные внешние и внутренние силы, то дифференциальные уравнения движения системы в форме (2) могут применяться в задачах механики. Однако полная система уравнений в этом случае получается очень громоздкой, что делает такой метод определения движения системы пригодным лишь в наиболее простых случаях.

Основное же затруднение при решении задач динамики как с помощью уравнений (2), так и с помощью уравнений (4) состоит в том, что внутренние силы системы обычно заранее неизвестны. Поэтому важно найти уравнения движения системы, которые не содержали бы внутренних сил. Такие уравнения можно получить с помощью общих теорем динамики о количестве движения и о моменте количества движения, используя следующее основное свойство внутренних сил системы.

Главный вектор и главный момент внутренних сил системы относительно любого центра равны нулю.

В самом деле, силы взаимодействия любых двух точек системы по закону равенства действия и противодействия равны друг другу по модулю и противоположно направлены; поэтому при геометрическом сложении всех внутренних сил системы они попарно взаимно уничтожаются и следовательно их главный вектор $\boldsymbol{F}^{(i)} = \sum \boldsymbol{F}_l^{(i)} = 0$. А так как силы взаимодействия каждых двух точек действуют по прямой, соединяющей эти точки, то их плечи относительно любого центра будут одинаковыми; поэтому векторы их моментов равны по модулю и противоположно направлены. Отсюда следует, что при составлении геометрической суммы моментов внутренних сил получим попарное сокращение всех моментов, и поэтому главный момент внутренних сил $\boldsymbol{L}^{(i)} = \sum \boldsymbol{L}_l^{(i)} = \sum \boldsymbol{r}_l \times \boldsymbol{F}_l^{(i)} = 0$.

В частных случаях теорема кинетической энергии тоже дает уравнение, не содержащее внутренних сил.

2. Теорема о количестве движения системы. Перепишем уравнения (3) в виде

$$m_l \frac{d\boldsymbol{v}_l}{dt} = \boldsymbol{F}_l^{(e)} + \boldsymbol{F}_l^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Суммируя эти уравнения по всем точкам системы и меняя в левой части порядок суммирования и дифференцирования, получим

$$\frac{d}{dt} \sum m_l \boldsymbol{v}_l = \sum \boldsymbol{F}_l^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_l^{(i)}.$$

Вектор

$$\boldsymbol{Q} = \sum m_l \boldsymbol{v}_l,$$

то есть геометрическая сумма количеств движения всех точек системы, называется *количеством движения системы.*

Вектор $\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum \boldsymbol{F}_l^{(e)}$

представляет собой главный вектор внешних сил системы, наконец, вектор

$$\boldsymbol{F}^{(i)} = \sum \boldsymbol{F}_l^{(i)}$$

есть главный вектор внутренних сил, равный нулю по установленному свойству внутренних сил. Таким образом, полученное равенство принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{5}$$

выражающий следующую теорему о количестве движения системы.

Производная по времени от количества движения системы материальных точек равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на оси декартовых координат теорема запишется в виде

$$\frac{dQ_x}{dt} = X^{(e)}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y^{(e)}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = Z^{(e)}, \tag{6}$$

где величины

$$Q_x = \sum m_i \dot{x}_i, \quad Q_y = \sum m_i \dot{y}_i, \quad Q_z = \sum m_i \dot{z}_i$$

являются проекциями количества движения системы на оси координат, а $X^{(e)}$, $Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$ — проекциями главного вектора внешних сил на эти оси.

3. Теорема о движении центра масс системы. Полученную теорему можно представить в другой форме. Известно, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}_c$ центра масс системы связан с радиусами-векторами отдельных точек формулой

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i = M\boldsymbol{r}_c,$$

где M — масса всей системы. Дифференцируя это соотношение по времени, находим

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{v}_c,$$

$\boldsymbol{v}_c$ — скорость центра масс. Следовательно,

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_c. \tag{7}$$

Как видим, количество движения системы можно представить как количество движения центра масс, определенное в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса системы.

Подставляя (7) в уравнение теоремы (5), получаем

$$M\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{w}_c$ — ускорение центра масс системы. Этот результат позволяет сформулировать следующую *теорему о движении центра масс.*

Центр масс системы движется как материальная точка, имеющая массу, равную массе всей системы, и находящаяся под действием силы, равной главному вектору внешних сил системы.

Проектируя (8) на оси координат, получаем закон движения центра масс в скалярной форме:

$$M\ddot{x}_c = X^{(e)}, \quad M\ddot{y}_c = Y^{(e)}, \quad M\ddot{z}_c = Z^{(e)}. \tag{9}$$

Из данной теоремы следует, что к движению центра масс системы можно полностью применить всю динамику точки

и при этом вполне точно, ибо центр масс есть математическая точка, в отличие от изолированной материальной точки, являющейся лишь приближенной моделью некоторого материального тела (если исключить случай поступательного движения).

Из установленных двух теорем вытекает важный вывод о том, что *внутренние силы не могут изменить движение центра масс системы или ее количество движения.*

Пусть, например, летящий снаряд взрывается где-то на своей траектории; если пренебречь изменением в силе сопротивления воздуха, то образовавшиеся при взрыве осколки снаряда при всем хаотическом характере их разлета полетят все же так, что их общий центр масс будет продолжать двигаться по той же траектории, что и до взрыва; это следует из того, что взрыв есть результат действия внутренних сил системы, которые не могут изменить движение центра масс.

Точно так же движение центра масс космического корабля может изменяться только внешними силами, такими как реакция вытекающей струи газов, сила давления солнечного света и т. д.; механизмы же или машины, установленные на корабле и создающие усилия, действующие лишь между частями корабля, не могут оказать влияния на движение центра масс корабля.

По той же причине, сколь бы ни был силен человек, он не в состоянии поднять себя за волосы, ибо мышечные усилия, прилагаемые для этой цели, будут внутренними силами системы.

Нельзя, однако, сказать, что внутренние силы совсем не могут оказывать никакого влияния на движение центра масс. Это влияние может существовать в косвенном виде, когда, при изменении расположения точек системы относительно центра масс под действием внутренних сил, происходит изменение внешних сил системы. Так, при разрыве снаряда на траектории его осколки в действительности будут испытывать большее сопротивление со стороны воздуха, чем снаряд до разрыва, поэтому движение центра масс системы окажется более замедленным. Точно так же отклонение закрылков самолета вниз, осуществляемое с помощью внутренних сил системы, приводит к увеличению внешней силы — подъемной силы самолета, что вызовет нужное изменение движения центра масс этой системы. Особенно хорошо косвенное влияние внутренних сил на движение центра масс видно при переходе парашютиста от свободного падения к падению с парашютом, когда возникает дополнительная внешняя сила, резко замедляющая падение.

4. Теорема о сохранении количества движения и движения центра масс. Пусть главный вектор внешних сил системы равен нулю, то есть

$$\mathbf{F}^{(e)} = 0.$$

Тогда из уравнений (5) и (8) имеем

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = 0, \quad \boldsymbol{w}_c = \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}, \ \boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{c}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{c}$ — постоянные векторы. Получили теорему о сохранении количества движения и движения центра масс системы.

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы остается постоянным во все время движения, а ее центр масс движется прямолинейно и равномерно.

В проекциях на оси координат будем иметь в данном случае три скалярных интеграла:

$$Q_x = \sum m_i \dot{x}_i = C_1, \ Q_y = \sum m_i \dot{y}_i = C_2, \ Q_z = \sum m_i \dot{z}_i = C_3 \tag{11}$$

или

$$\dot{x}_c = c_1, \ \dot{y}_c = c_2, \ \dot{z}_c = c_3. \tag{12}$$

Уравнения (12) позволяют сразу же найти закон движения центра масс системы

$$x_c = c_1 t + c_4, \ y_c = c_2 t + c_5, \ z_c = c_3 t + c_6. \tag{13}$$

Может также случиться, что главный вектор внешних сил отличен от нуля, но равна нулю какая-нибудь его проекция, например, $X^{(e)} = 0$. В таком случае из первых уравнений системы (6) и (9) будем иметь один первый интеграл

$$\sum m_i \dot{x}_i = C$$

или

$$\dot{x}_c = c.$$

В частности, если центр масс в начальный момент находится в покое или если начальная скорость центра масс по оси x равнялась нулю, то $C = c = 0$, и этот интеграл принимает вид

$$\sum m_i \dot{x}_i = 0 \ \text{ или } \ \dot{x}_c = 0. \tag{14}$$

Беря за плоскость (yz) плоскость, проходящую через на-

чальное положение центра масс, интегрированием предыдущих соотношений получим

$$\sum m_i x_i = 0 \text{ или } x_c = 0, \qquad (15)$$

если учесть, что в начальный момент $x_c = 0$.

Интегралы (14) и (15) находят большое применение в задачах механики. Из этих интегралов вытекает, в частности, что внутренние силы могут изменять движение системы относительно центра масс. Так, если часть покоющейся системы пришла в движение, получив под действием внутренних сил некоторую скорость, то остальная часть придет в движение в противоположном направлении, имея скорость, удовлетворяющую интегралу (14).

Рассмотрим, например, задачу об определении скорости откатных частей орудия при выстреле, когда известна скорость v вылета снаряда. Будем предполагать, что откат происходит без торможения и орудие расположено горизонтально. Движением пороховых газов пренебрегаем. Тогда, направляя ось x по скорости v снаряда, можем интеграл (14) записать в виде

$$MV + mv = 0,$$

где M и m — массы орудия и снаряда, V — скорость отката. Отсюда находим решение задачи

$$V = -\frac{m}{M} v.$$

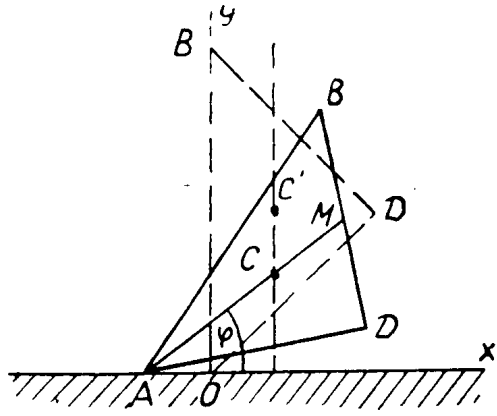
Знак минус говорит о том, что откат происходит в направлении, противоположном движению снаряда.

Подплыв на лодке к берегу, человек идет к носу лодки, чтобы выйти из нее. Однако лодка не остается на месте, а начинает двигаться от берега. Объясняется это тем, что, если пренебречь весьма малым сопротивлением воды, проекция главного вектора внешних сил, то есть сил тяжести и давления воды, на направление движения человека и лодки равна нулю; поэтому центр тяжести всей системы не может получить горизонтального перемещения, и поскольку одна часть системы — человек — перемещается в одном направлении, другая ее часть — лодка — будет перемещаться в противоположном направлении.

Ходьба становится возможной потому, что, отталкиваясь от грунта в горизонтальном направлении, человек создает внешнюю силу — силу трения между подошвами обуви и грунтом. Если же человек будет находиться на идеально гладкой плоскости, то ходьба становится невозможной в силу отсутствия внешних горизонтально направленных сил.

Пример. Пластинка $OB'D'$ (фиг. 134), имеющая форму прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой $a = OB'$, поставлена вершиной O на гладкую горизонтальную плоскость так, что гипотенуза расположена по вертикали. Предоставленная самой себе, пластинка под действием силы тяжести начинает падать. Определить траекторию средней точки M катета BD при этом падении.

Ось x направляем по горизонтали, ось y — вертикально вверх, беря ее совпадающей с начальным положением гипотенузы. Внешние силы —



Фиг. 134

сила тяжести и реакция плоскости — направлены вертикально, поэтому $X^{(e)} = 0$. Следовательно, падение пластинки будет происходить таким образом, что ее центр тяжести будет опускаться по вертикали.

Тогда, вводя для переменного положения ABD пластинки угол φ между осью x и медианой AM, имеем для координат точки M

$$x = x_C + CM \cdot \cos\varphi, \quad y = AM \sin\varphi.$$

Из свойств треугольника имеем

$$x_C = \frac{1}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{6}, \quad AD = BD = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad MD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + MD^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}, \quad CM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{10}}{12}.$$

Поэтому

$$x = \frac{a}{6}\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\varphi\right), \quad y = \frac{a\sqrt{10}}{4}\sin\varphi.$$

Исключая φ, находим уравнение траектории точки M в виде

$$\left(x - \frac{a}{6}\right)^2 + \frac{y^2}{9} = \frac{5}{72}a^2.$$

Следовательно, точка M будет двигаться по эллипсу.

5. Задача двух тел. Рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек, находящихся только под действием сил взаимного притяжения по закону всемирного тяготения. Если пренебречь малым влиянием других планет,

то можно, например, Солнце и любую из планет принять за такую систему.

Так как внешних сил нет, то по теореме о сохранении центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.

Пусть r_1 с координатами x_1, y_1, z_1 есть радиус-вектор точки S (Солнца) относительно начала неподвижной системы координат, M — ее масса. Аналогичные величины для другой точки P (планеты) обозначим через $r_2(x_2, y_2, z_2)$ и m. Найдем относительное движение точки P по отношению к S.

Вводя относительный радиус-вектор $r = r_2 - r_1$ точки P с модулем

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

будем для величины силы притяжения иметь

$$F = f\frac{Mm}{r^2},$$

где f — постоянная всемирного тяготения. Поэтому уравнения движения рассматриваемых точек будут

$$Mw_1 = f\frac{Mm}{r^2}\frac{r}{r}, \quad mw_2 = -f\frac{Mm}{r^2}\frac{r}{r}$$

или

$$w_1 = \frac{fm}{r^2}\frac{r}{r}, \quad w_2 = -\frac{fM}{r^2}\frac{r}{r}.$$

Если взять подвижную систему отсчета с началом в S, движущуюся поступательно вместе с S, то ускорение Кориолиса будет отсутствовать, и ускорение точки P будет

$$w_2 = w_1 + w_r,$$

где w_r — ее относительное ускорение. Отсюда

$$w_r = w_2 - w_1 = -f\frac{M + m}{r^2}\frac{r}{r}.$$

Это говорит о том, что точка P движется относительно точки S так, как если бы последняя была неподвижной и имела бы массу $M + m$. Следовательно, гауссова постоянная для точки S, равная $\mu = fM$ для неподвижного центра притяжения, окажется в данном случае равной $\mu = f(M + m)$.

Отсюда вытекает поправка, которую нужно сделать к третьему закону Кеплера, относящемуся к движению планет и рассмотренному ранее в динамике точки. Именно, из установленного нами равенства

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

где T — период обращения планеты, a — большая полуось ее орбиты, мы сделали вывод о постоянстве отношения T^2/a^3 для всех планет солнечной системы. В действительности же для двух каких-либо планет будем иметь

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} : \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{M + m_2}{M + m_1} = \frac{1 + \dfrac{m_2}{M}}{1 + \dfrac{m_1}{M}}.$$

По малости m_1 и m_2 в сравнении с массой Солнца M это отношение близко к единице, но все же несколько отличается от нее (на тысячные и даже меньшие доли). Поэтому третий закон Кеплера следует считать лишь приближенным законом.

В остальном движение точки P относительно S будет обладать теми же свойствами, что и относительно неподвижного центра: относительная траектория будет плоской кривой второго порядка, в одном из фокусов которой будет находиться точка S, причем будет выполняться теорема площадей.

6. Уравнение Мещерского для движения точки переменной массы и формула Циолковского. В классической механике масса тел рассматривается как величина постоянная. Однако существуют такие тела, масса которых изменяется во время движения, увеличиваясь или уменьшаясь за счет присоединения или отбрасывания некоторых частиц или других тел. Так, массы небесных тел уменьшаются за счет истечения из раскаленных тел различных простейших частиц и увеличиваются за счет выпадения метеоритов и присоединения элементарных частиц, испускаемых другими телами; масса вращающихся частей лебедки увеличивается или уменьшается при наматывании или разматывании троса; масса воздушного шара уменьшается при сбрасывании балласта.

Особенно большое практическое значение теория движения тел переменной массы приобрела в последние десятилетия в связи с появлением реактивной авиации и ракет, расходующих при работе двигателя такое количество горючего, которое составляет обычно большую часть всей первоначальной массы самолета или ракеты. В связи с этим механика тел переменной массы привлекла большое внимание ученых и в настоящее время представляет собой хорошо развитый отдел механики.

В основе теории движения тел с переменной массой лежит уравнение движения точки переменной массы, данное И. В. Мещерским. Установим это уравнение для случая уменьшающейся массы движущейся точки.

Пусть $M = M(t)$ есть переменная масса материальной точки, являющаяся убывающей функцией времени; тогда изменение ΔM этой массы за время Δt будет отрицательно. Через $\boldsymbol{v}$ обозначим скорость точки, а через $\boldsymbol{u}$ — скорость отделяющихся от основной точки частиц.

Рассмотрим систему, состоящую из основной точки и частиц, отделившихся от нее за время Δt. Количество движения этой системы в момент t есть

$$\boldsymbol{Q}_0 = M\boldsymbol{v}$$

Так как за промежуток времени Δt отделятся частицы с массой $(-\Delta M)$, то количество движения системы в момент $t + \Delta t$ будет

$$\boldsymbol{Q} = (M + \Delta M)(\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}\Delta M.$$

Следовательно, изменение количества движения системы за время Δt равно

$$\Delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = M\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\Delta M - \boldsymbol{u}\Delta M + \Delta M\Delta\boldsymbol{v}.$$

Деля это выражение на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{dM}{dt} - \boldsymbol{u}\frac{dM}{dt}.$$

Применяя теорему о количестве движения системы, найдем согласно (5)

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dM}{dt}. \qquad (16)$$

Это уравнение и называется *уравнением Мещерского*. Очевидно, что разность $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r$ есть относительная скорость отделяющихся частиц по отношению к основной точке. Поэтому уравнение Мещерского можно записать в виде

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)} + \boldsymbol{v}_r\frac{dM}{dt}. \qquad (16')$$

Полученное уравнение движения отличается от уравнения движения точки постоянной массы наличием в правой части добавочного члена

$$\boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{v}_r\frac{dM}{dt},$$

играющего роль дополнительной силы, действующей на точку. Эта сила называется *реактивной силой*, и так как $dM/dt < 0$, то она всегда будет направлена в сторону, противоположную относительной скорости $\boldsymbol{v}_r$ отделяющихся частиц. Во всякого рода реактивных двигателях эта сила, направлен-

ная противоположно направлению истечения продуктов горения, является основной силой, разгоняющей ракету или самолет до нужной скорости.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

a. Абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю. Полагая в (16) $\boldsymbol{u}=0$, можем уравнение представить в виде

$$\frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}^{(e)},$$

то есть в том же виде, что и для точки постоянной массы с той только разницей, что массу точки M здесь нельзя выносить из-под знака производной.

b. Относительная скорость отделяющихся частиц равна нулю. В этом случае в уравнении (16′) следует положить $\boldsymbol{v}_r=0$, так что реактивная сила исчезает, и уравнение Мещерского становится уравнением

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)},$$

полностью совпадающим с уравнением движения точки постоянной массы.

c. Главный вектор внешних сил равен нулю. Уравнение (16′) принимает вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{v}_r\frac{dM}{dt}.$$

В ракетах скорость истечения продуктов горения $\boldsymbol{v}_r$ можно считать постоянной, направленной противоположно скорости ракеты $\boldsymbol{v}$. Проектируя в этом случае полученное уравнение на направление движения ракеты, будем иметь

$$M\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dM}{dt},$$

откуда

$$dv=-v_r\frac{dM}{M}.$$

Пусть в начальный момент $t=0$ скорость ракеты равнялась нулю. Интегрируя полученное уравнение в пределах от 0 до переменного t, получим

$$v=v_r\ln\frac{M_0}{M}, \tag{17}$$

где M_0 — начальная масса ракеты. Эта формула впервые была установлена К. Э. Циолковским и носит его имя.

Перейдя в (17) к десятичному логарифму, можем приближенно записать

$$v = 2{,}30 v_r \lg \frac{M_0}{M}. \qquad (17')$$

Из этой формулы видны трудности создания космических ракет, которым для удаления от Земли нужно сообщить вторую космическую скорость, равную 11,2 *км/сек* (см. § 23, п. 6). Дело в том, что по крайней мере до последнего дясятилетия практически получаемые в ракетных двигателях скорости истекающих частиц не превышали 2,5 *км/сек*, и для получения указанной скорости нужно, чтобы десятичный логарифм в (17′) приблизительно равнялся двум. Следовательно, $M_0 \approx 100M$, так что в процессе работы двигателя нужно израсходовать 99% массы ракеты. Если же такая ракета должна возвратиться на Землю, то при торможении придется снова израсходовать такую же долю оставшейся массы. Поэтому создание космических кораблей в виде одиночной ракеты с обычными химическими горючими технически неосуществимо, и здесь удалось достичь нужных результатов только на основе использования идеи Циолковского о составных ракетах и некоторых других достижений науки и техники.

Если ракета движется под действием силы тяжести и ее начальная скорость имеет некоторое значение v_0, то формула (17) при вертикальном взлете заменится формулой

$$v = v_0 - gt + v_r \ln \frac{M_0}{M}.$$

Пример. Требуется найти закон движения реактивного самолета по горизонтальной прямой при линейном законе изменения его массы $M = M_0(1 - \alpha t)$, где $\alpha = \text{const}$. Сила сопротивления воздуха и подъемная сила пропорциональны квадрату скорости, центр масс самолета не изменяет своего положения относительно корпуса самолета.

Внешними силами являются сила сопротивления воздуха $\kappa_1 v^2$, подъемная сила $\kappa_2 v^2$ и сила веса самолета Mg. В силу поступательного характера движения самолета его можно рассматривать как материальную точку переменной массы, для которой будет справедливо уравнение Мещерского (16′). Проектируя это уравнение на направление полета и на вертикаль, придем к уравнениям

$$M\frac{dv}{dt} = -\kappa_1 v^2 - v_r \frac{dM}{dt},$$

$$0 = -\kappa_2 v^2 + Mg.$$

Исключая v^2 с помощью второго уравнения, можем первое уравнение записать в виде

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{Mg}{\kappa} - v_r \frac{dM}{dt},$$

где $\kappa = \kappa_2/\kappa_1$ — так называемое качество самолета. В общем случае коэффициенты κ_1 и κ_2 сами зависят от скорости; ограничимся тем случаем, когда эта зависимость такова, что качество самолета κ оказывается постоянным.

Деля уравнение на M и замечая, что

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\ln M = -\frac{\alpha}{1-\alpha t},$$

получаем

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\kappa} + \frac{\alpha v_r}{1-\alpha t}.$$

Интегрируя это уравнение, считая $v_r = \text{const}$, находим

$$v = -\frac{g}{\kappa}t - v_r \ln(1-\alpha t) + C.$$

Из начального условия $t = 0$, $v = v_0$, имеем $C = v_0$. Поэтому закон изменения скорости будет

$$v = v_0 - \frac{g}{\kappa}t - v_r \ln(1-\alpha t).$$

Если s есть путь, проходимый самолетом, то

$$v = \frac{ds}{dt},$$

и, интегрируя еще раз, находим

$$s = v_0 t - \frac{g}{2\kappa}t^2 - v_r \int \ln(1-\alpha t)\cdot dt.$$

Вводя новую переменную $x = 1 - \alpha t$, имеем

$$\int \ln(1-\alpha t)\,dt = -\frac{1}{\alpha}\int \ln x \cdot dx = -\frac{1}{\alpha}(x\ln x - x) =$$

$$= \frac{1-\alpha t}{\alpha}[1 - \ln(1-\alpha t)].$$

Поэтому

$$s = v_0 t - \frac{g}{2\kappa}t^2 + v_r\frac{1-\alpha t}{\alpha}[\ln(1-\alpha t) - 1] + C'.$$

Пусть при $t = 0$ $s = 0$, тогда $C' = v_r/\alpha$. Таким образом, окончательно закон движения самолета будет

$$s = (v_0 + v_r)t - \frac{g}{2\kappa}t^2 + \frac{v_r}{\alpha}(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t).$$

§ 33. Теорема о моменте количества движения системы

1. Вывод теоремы. Применяя известную из динамики точки теорему о моменте количества движения к любой точке системы, имеем

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где в правой части отдельно записаны моменты внешней и внутренней сил, действующих на данную точку.

Суммируя записанные равенства по всем точкам системы и меняя в левой части порядок дифференцирования и суммирования, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(i)}. \qquad \text{(а)}$$

Вектор

$$\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad (1)$$

являющийся главным моментом количеств движения точек системы, называется *моментом количества движения системы* или *кинетическим моментом системы* относительно неподвижного центра O — начала радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_i$.

Вектор

$$\boldsymbol{L}^{(e)} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

есть главный момент внешних сил системы относительно того же центра.

Наконец, вектор

$$\boldsymbol{L}^{(i)} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(i)},$$

представляющий собой главный момент внутренних сил системы, равен нулю по основному свойству внутренних сил.

Таким образом, уравнение (а) может быть записано в виде

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{L}^{(e)}, \qquad (2)$$

составляющем следующую теорему о моменте количества движения системы:

Производная по времени от момента количества движения системы относительно какого-либо центра равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра.

В проекциях на оси декартовых координат с началом в центре моментов теорему можно записать в виде

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x^{(e)}, \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y^{(e)}, \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z^{(e)}, \qquad (3)$$

где главные моменты K_x, K_y, K_z и $L_x^{(e)}$, $L_y^{(e)}$, $L_z^{(e)}$ относительно координатных осей могут быть определены простым суммированием моментов соответствующих векторов; в частности, используя общие формулы момента вектора относи-

тельно координатных осей, можем воспользоваться выражениями

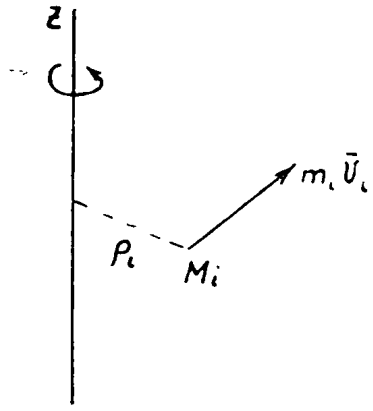
$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i); \\ K_y &= \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i); \\ K_z &= \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i); \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} L_x^{(e)} &= \sum (y_i Z_i^{(e)} - z_i Y_i^{(e)}); \\ L_y^{(e)} &= \sum (z_i X_i^{(e)} - x_i Z_i^{(e)}); \\ L_z^{(e)} &= \sum (x_i Y_i^{(e)} - y_i X_i^{(e)}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь x_i, y_i, z_i, как и ранее, — координаты точек системы.

Ради краткости установленную теорему будем в дальнейшем называть теоремой моментов.

2. Случай вращения системы вокруг оси. Допустим, что система материальных точек вращается вокруг некоторой неподвижной оси с общей для всех точек системы угловой скоростью ω. Примем ось вращения за ось z. Тогда вектор скорости, а следовательно и вектор количества движения $m_i v_i$ какой-либо точки M_i системы, будет лежать в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и будет направлен в сторону вращения системы (фиг. 135).



Фиг. 135

Считая направление оси z совпадающим с направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$ и обозначая через ρ_i расстояние точки от оси, найдем по определению момента вектора относительно оси, что момент количества движения точки относительно оси вращения равен

$$K_{iz} = m_i v_i \rho_i.$$

Подставляя сюда выражение линейной скорости

$$v_i = \omega \rho_i,$$

получаем

$$K_{iz} = \omega m_i \rho_i^2.$$

Следовательно, момент количества движения всей системы относительно оси z будет

$$K_z = \sum K_{iz} = \omega \sum m_i \rho_i^2.$$

Сумма произведений масс точек системы на квадраты их расстояний от какой-либо оси называется моментом инерции системы относительно этой оси. Поэтому полученному выражению можно придать вид:

$$K_z = I\omega, \tag{6}$$

где

$$I = \sum m_i \rho_i^2 \tag{7}$$

есть момент инерции рассматриваемой системы материальных точек относительно оси вращения.

Подставляя выражение (6) в третье равенство (3), находим, что для вращательного движения системы вокруг оси теорема моментов может быть представлена в форме

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = L_z^{(e)}; \tag{8}$$

напоминаем, что здесь $L_z^{(e)}$ есть главный момент внешних сил относительно оси вращения.

Уравнение (8) остается справедливым и в том случае, когда точки системы участвуют, помимо вращения вокруг оси, еще в добавочных движениях в плоскостях, проходящих через ось вращения и данную точку, ибо моменты количеств этих добавочных движений равны нулю. В этом случае расстояния точек системы ρ_i от оси вращения могут меняться со временем, момент инерции I, согласно (7), окажется переменной величиной и его нельзя выносить из-под знака производной. Если же указанных добавочных движений нет или же они состоят из движений, происходящих параллельно оси вращения, то все ρ_i остаются неизменными, и момент инерции I будет постоянным. Поэтому в этом случае уравнение моментов принимает вид:

$$I\frac{d\omega}{dt} = L_z^{(e)}. \tag{9}$$

Такое уравнение имеет место, например, при вращении абсолютно твердого тела вокруг оси, ибо у такого тела расстояния любых его точек от точек, лежащих на оси вращения, не могут изменяться.

Размерность момента инерции есть

$$[I] = ML^2,$$

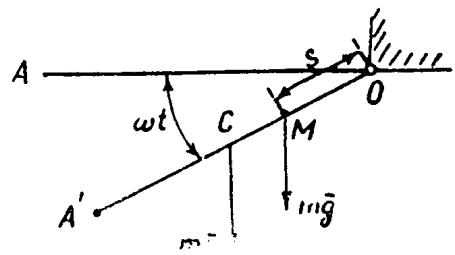
где M — единица массы, L — единица длины. Поэтому в физической системе SI размерность момента инерции будет

$$[I] = кг.м^2,$$

а в технической системе MK_fS —

$$[I] = кГ.м.сек^2.$$

Пример. Однородная игла OA длиной l и с массой m (фиг. 136) может под действием силы тяжести вращаться вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости чертежа. В начальный момент игла приведена в горизонтальное положение и предоставлена самой себе. В тот же момент от конца O по игле начинает ползти насекомое M, имеющее ту же массу m. Спрашивается, каков должен быть закон движения насекомого, чтобы в дальнейшем игла вращалась равномерно.



Фиг. 136

Обозначим через ω постоянную угловую скорость вращения иглы. Тогда в переменном положении игла будет составлять угол ωt со своим начальным положением. Принимая насекомое за материальную точку, обозначим через s переменный путь, проходимый насекомым по игле.

Так как система имеет общее вращение вокруг оси O, то можем воспользоваться уравнением (8). Момент силы тяжести иглы относительно O будет

$$mg\frac{l}{2}\cos\omega t,$$

ибо эту силу можем считать приложенной в средней точке иглы C. Момент силы тяжести насекомого есть

$$mgs\cos\omega t.$$

Внешней силой является еще реакция оси O, момент которой относительно этой оси равен нулю. Таким образом, главный момент внешних сил относительно оси O будет

$$L_z^{(e)} = mg\left(\frac{l}{2} + s\right)\cos\omega t.$$

Обозначая через I_0 момент инерции иглы относительно оси вращения, видим, что момент инерции всей системы относительно оси O будет

$$I = I_0 + ms^2.$$

В итоге уравнение (8) примет в данной задаче вид:

$$\frac{d}{dt}\left[(I_0 + ms^2)\,\omega\right] = mg\left(\frac{l}{2} + s\right)\cos\omega t.$$

Учитывая, что переменным в левой части является только путь s, можем, производя дифференцирование и сокращая m, переписать это уравнение в виде

$$2\omega s\frac{ds}{dt}=g\left(\frac{l}{2}+s\right)\cos\omega t.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{4s\,ds}{l+2s}=\frac{g}{\omega}\cos\omega t\cdot dt.$$

В результате интегрирования найдем

$$2s-l\ln(l+2s)=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t+C.$$

При $t=0$ имеем $s=0$, откуда для постоянной интегрирования получаем значение $C=-l\ln l$. Следовательно, закон движения насекомого определится неявной зависимостью

$$2s-l\ln\left(1+2\frac{s}{l}\right)=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t.$$

3. Элементарные сведения о моментах инерции. При применении уравнений (8) и (9) к задачам механики необходимо уметь вычислять моменты инерции различных тел. Рассмотрим некоторые сведения об этих моментах.

Всякое тело можно считать системой материальных частиц, сплошным образом заполняюших некоторый объем; предельным переходом в выражении (7) момента инерции

$$I=\sum m_i\rho_i^2$$

можно получить момент инерции тела. Для этого достаточно массы частиц устремить к нулю, а их число — к бесконечности. В результате момент инерции тела относительно какой-либо оси представится интегралом

$$I=\int_\tau \rho^2 dm, \tag{10}$$

где ρ — переменное расстояние точек тела от оси, dm — масса элементарной частицы, а интегрирование распространено на весь объем тела τ.

Полагая $dm=\mu d\tau$, где μ — плотность, а $d\tau$ — объем элементарной частицы, можем представить (10) в форме

$$I=\int_\tau \mu\rho^2 d\tau \tag{10'}$$

или

$$I=\int\int\int \mu\rho^2\,dx\,dy\,dz. \tag{10''}$$

Таким образом, в общем случае момент инерции тела представляется в виде некоторого тройного интеграла.

Если тело однородно, то есть $\mu = \text{const}$, можем, согласно (10′), момент инерции определять по формуле

$$I = \mu I_\tau,$$

причем

$$I_\tau = \int_\tau \rho^2 d\tau$$

есть чисто геометрическая величина, называемая моментом инерции объема.

Для тел, массы которых можно считать распределенными по некоторой поверхности S, вводим поверхностную плотность μ', полагая в (10) $dm = \mu' dS$, где dS — элемент площади поверхности. Тогда получим

$$I = \int_S \mu' \rho^2 dS,$$

а для однородных тел

$$I = \mu' I_S,$$

где

$$I_S = \int_S \rho^2 dS$$

— момент инерции площади поверхности. Видим, что в этом случае тройное интегрирование по объему заменяется двойным интегрированием по поверхности.

Наконец, если массу тела можно считать распределенной по некоторой линии длиною l, то полагаем $dm = \mu'' dl$, где μ'' — линейная плотность. Тогда (10) дает

$$I = \int_l \mu'' \rho^2 dl;$$

для однородных тел будем иметь

$$I = \mu'' I_l,$$

где

$$I_l = \int_l \rho^2 dl$$

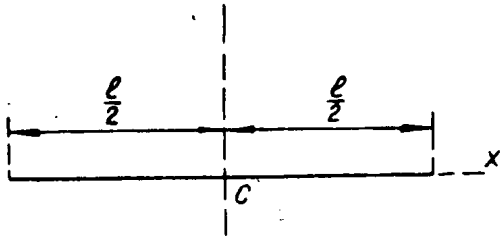
есть момент инерции линии. Задача сводится в данном случае к однократному интегрированию вдоль рассматриваемой кривой.

Вычисление моментов инерции значительно облегчается для тел, обладающих той или иной симметрией. В этом случае применяются два основных приема. Во-первых, преобразованием координат можно добиться, что в формуле (10″) все пределы интегрирования станут постоянными и, следовательно, задача сведется к вычислению произведения интегралов. Во-вторых, у симметричных тел за элемент массы можно принять массу элемента объема тела, у ко-

торого малыми будут только два или даже один размер; в таком случае задача сведется к двукратному или однократному интегрированию. Часто оба этих приема применяются совместно.

Рассмотрим несколько примеров.

а. Однородный стержень. Найдем момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его средину C (фиг. 137) перпендикулярно к стержню·



Фиг. 137

Примем точку C за начало координат. Ось x направим по стержню. Тогда $\rho^2 = x^2$, $dl = dx$ и

$$I_l = \int_l \rho^2 dl = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right) = \frac{1}{12} l^3.$$

Следовательно, момент инерции будет

$$I = \mu'' I_l = \frac{1}{12} \mu'' l^3.$$

Так как $\mu'' l = M$ — масса стержня, то окончательно

$$I = \frac{1}{12} M l^2.$$

b. Круглая однородная пластинка. Определим момент инерции однородной круглой пластинки относительно оси, перпендикулярной плоскости пластинки и проходящей через ее центр C (фиг. 138).

За элемент площади примем площадь кругового кольца, лежащего между окружностями радиусов r и $r + dr$. Тогда $\rho^2 = r^2$, $dS = 2\pi r dr$, поэтому

$$I_S = \int_S \rho^2 dS = 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2} \pi a^4,$$

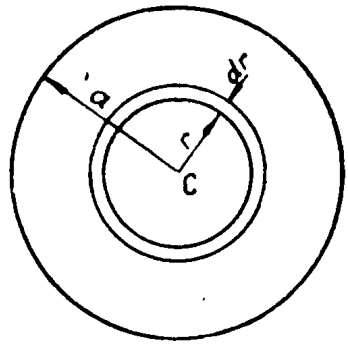
где a — радиус пластинки. Отсюда находим:

$$I = \mu' I_S = \frac{1}{2}\mu'\pi a^4.$$

Масса пластинки есть $M = \mu'\pi a^2$. Поэтому искомый момент инерции будет:

$$I = \frac{1}{2}Ma^2.$$

Этой же формулой будет выражаться и момент инерции однородного сплошного кругового цилиндра относительно его геометрической оси, ибо для вычисления этого момента нужно лишь вместо dS взять элемент объема $d\tau$, отличающийся от dS множителем h, равным высоте цилиндра; в окончательной формуле этот множитель войдет в массу цилиндра.



Фиг. 138

c. Однородное тело вращения. Возьмем сплошное однородное тело вращения, ограниченное двумя поперечными сечениями $z = z_1$ и $z = z_2$ (фиг. 139). Найдем момент инерции тела относительно его геометрической оси Oz.

Сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ выделим элементарный объем. Его можно рассматривать как однородную пластинку толщиной dz и радиуса r, имеющую объем $d\tau = \pi r^2 dz$. По предыдущему ее момент инерции относительно оси z будет:

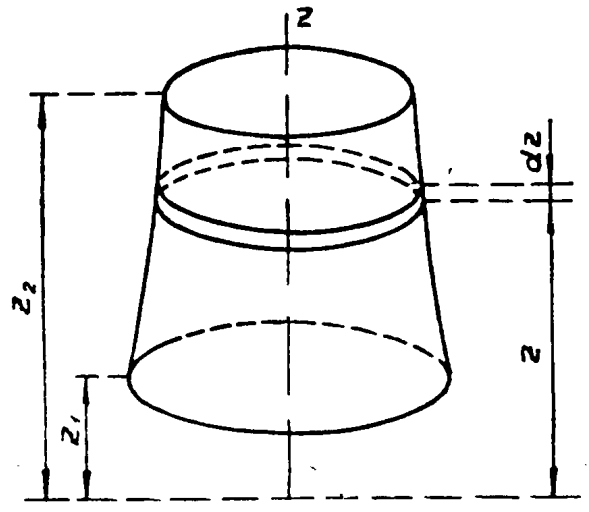
$$\frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}r^2\mu d\tau = \frac{1}{2}\mu\pi r^4 dz.$$

Поэтому момент инерции всего тела есть

$$I = \frac{1}{2}\mu\pi\int_{z_1}^{z_2} r^4 dz.$$

Зная уравнение образующей $r = r(z)$, мы можем по этой формуле определить момент инерции всякого тела вращения относительно его оси.

d. Однородный круговой конус. Применим полученную формулу к определению момента инерции одноя родного кругового конуса относительно его оси. Помещаначало координат в вершину конуса и направляя ось z



Фиг. 139

в сторону основания (фиг. 140), видим, что $z_1 = 0$, $z_2 = h$, где h — высота конуса. Обозначая через a радиус основания, находим уравнение образующей в виде

$$r = \frac{a}{h} z.$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{2} \pi\mu \frac{a^4}{h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{1}{10} \pi\mu a^4 h.$$

Выделяя массу конуса

$$M = \frac{1}{3} \mu\pi a^2 h,$$

находим окончательно

$$I = \frac{3}{10} Ma^2.$$

e. Однородный шар. Для определения момента инерции однородного сплошного шара относительно любого

из его диаметров, тоже рассматриваем его как тело вращения с уравнением

$$r^2 = a^2 - z^2,$$

где a — радиус шара, а начало координат взято в центре шара. Тогда имеем:

$$I = \frac{1}{2}\mu\pi\int_{-a}^{a}(a^2 - z^2)^2\,dz = \frac{1}{2}\mu\pi\int_{-a}^{a}(a^4 - 2a^2z^2 + z^4)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\mu\pi\left[a^4z - \frac{2}{3}a^2z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{-a}^{a} =$$

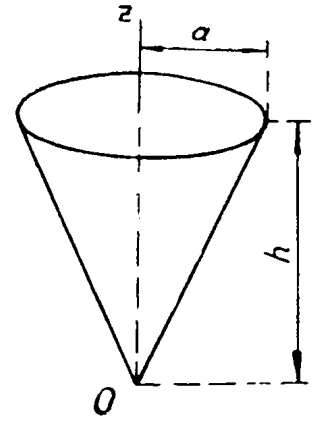
$$= \frac{1}{2}\mu\pi a^5\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{15}\mu\pi a^5.$$

Так как масса шара есть

$$M = \frac{4}{3}\mu\pi a^3,$$

то окончательно получим

$$I = \frac{2}{5}Ma^2.$$



Фиг. 140

4. Теорема Штейнера. Во всех рассмотренных примерах момент инерции определялся относительно оси, проходящей через центр масс тела. Если такой момент инерции известен, то теорема Штейнера позволяет найти момент инерции относительно любой параллельной оси.

Рассмотрим произвольную систему материальных точек. Возьмем систему декартовых координат с началом в центре масс системы C (фиг. 141) и в плоскости (yz) выберем какую-либо ось l, параллельную оси z. Пусть расстояние между осями z и l будет a, расстояния точки системы M_i от осей l и z равны соответственно ρ_i и ρ_i'.

Опустим из точки M_i перпендикуляры на оси l и z и основания перпендикуляров соединим прямой AB. Плоскость полученного треугольника будет параллельна плоскости (xy), а сторона AB будет равна a. Из этого треугольника имеем:

$$\rho_i^2 = \rho_i'^2 + a^2 - 2a\rho_i'\cos\theta_i,$$

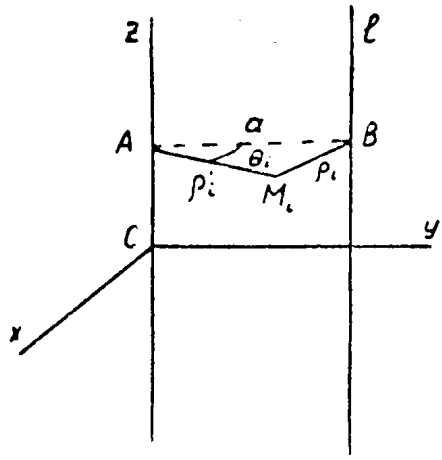
где θ_i — угол треугольника, противолежащий стороне ρ_i. Подставляя это выражение в формулу момента инерции системы относительно оси l

$$I = \sum m_i \rho_i^2,$$

получаем:

$$I = \sum m_i \rho_i'^2 + a^2 \sum m_i - 2a \sum m_i \rho_i' \cos\theta_i.$$

Но $\sum m_i \rho_i'^2 = I_c$ — момент инерции системы относительно оси z, то есть оси, параллельной оси l и проходящей через центр масс системы. Затем $\sum m_i = M$ — масса всей системы, а



Фиг. 141

$$\sum m_i \rho_i' \cos\theta_i = \sum m_i y_i = M y_c,$$

где y_c — координата центра масс системы, равная нулю при данном выборе осей координат.

В результате находим:

$$I = I_c + Ma^2. \qquad (11)$$

Эта формула и выражает собой теорему Штейнера. Таким образом, зная момент инерции I_c относительно оси, проходящей через центр масс системы, можно по формуле (11) найти момент инерции относительно любой параллельной оси.

Равенство (11) говорит о том, что для всей совокупности параллельных осей наименьшим будет момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и что при переходе к другим осям по мере удаления от центра масс момент инерции будет монотонно возрастать.

Если взять другую параллельную ось l', находящуюся на расстоянии a' от оси z, то момент инерции относительно этой оси будет

$$I' = I_c + Ma'^2.$$

Вычитая отсюда равенство (11), находим:

$$I' = I + M(a'^2 - a^2).$$

Эта формула позволяет найти момент инерции I', когда известен момент I.

Найдем, например, момент инерции однородного стержня относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через конец стержня. Так как в данном случае

$$I_c = \frac{1}{12} Ml^2, \quad a = \frac{l}{2},$$

то по формуле (11) имеем:

$$I = \frac{1}{12} Ml^2 + \frac{1}{4} Ml^2 = \frac{1}{3} Ml^2.$$

Момент инерции однородного шара относительно оси, касательной к поверхности шара, будет

$$I = \frac{2}{5} Ma^2 + Ma^2 = \frac{7}{5} Ma^2.$$

5. Интегралы площадей. Если главный момент внешних сил $\boldsymbol{L}^{(e)} = 0$, то уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{c}. \tag{12}$$

Следовательно, в этом случае во все время движения кинетический момент системы остается постоянным как по модулю, так и по направлению.

В проекциях на оси координат получаем три скалярных интеграла

$$K_x = c_1, \quad K_y = c_2, \quad K_z = c_3, \tag{13}$$

или, согласно (4),

$$\left.\begin{aligned} \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) &= c_1, \\ \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) &= c_2, \\ \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Эти интегралы носят название *интегралов площадей*, ибо, как известно из кинематики, выражения в круглых скобках представляют собой удвоенные секториальные скорости проекций точек системы в координатных плоскостях (yz), (xz), (xy) соответственно.

Если $\boldsymbol{L}^{(e)}$ не равняется нулю, а равняется нулю главный момент внешних сил относительно какой-либо оси координат, то будем иметь лишь один скалярный интеграл. Например, если $L_z^{(e)} = 0$, то третье уравнение (3) дает интеграл

$$K_z = c. \tag{14}$$

Когда же в этом случае движение системы относительно

оси z есть вращение вокруг этой оси с общей угловой скоростью ω, то, согласно (6), интеграл (14) принимает вид

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{const}, \tag{15}$$

где I_0 и ω_0 — значения момента инерции относительно оси вращения и угловой скорости в начальный момент времени.

Пусть, например, платформа со стоящим на ней человеком вращается без трения вокруг вертикальной оси, (геометрической оси платформы) с угловой скоростью ω_0. Если человек раздвинет свои руки в стороны, то тем самым его момент инерции, а следовательно, и момент инерции всей системы относительно оси вращения возрастет; поэтому, согласно (15), угловая скорость вращения системы уменьшится, ибо произведение $I\omega$ должно остаться неизменным.

Из интеграла (14) вытекает важное следствие о том, что если при равенстве нулю главного момента внешних сил относительно какой-либо оси часть покоющейся системы пришла в движение с моментом количества движения K_{1z} относительно этой оси, то остальная часть системы тоже придет в движение, имея относительно этой оси кинетический момент K_{2z}, равный по величине и противоположный по знаку моменту K_{1z}. Это следует из того, что в данном случае $c = 0$ и, следовательно,

$$K_{1z} + K_{2z} = 0.$$

Вспомним, что секториальная скорость точки в плоскости (xy) через полярные координаты r, φ в этой плоскости определяется формулой

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}.$$

Как говорилось выше,

$$K_z = 2\sum m_i \frac{d\sigma_{iz}}{dt},$$

и интеграл (14) можно еще записать в форме

$$\sum m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i = c, \tag{14'}$$

где r_i и φ_i — полярные координаты точки в плоскости, перпендикулярной оси z.

Пример 1. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит листок бумаги с закрепленной точкой O (фиг. 142 (a)). На листке начерчена окружность радиуса a, проходящая через точку O. В начальный момент $t = 0$ из точки A диаметра OA по окружности начинает двигаться насекомое массы m с постоянной относительно бумаги скоростью v. Найти движение системы.

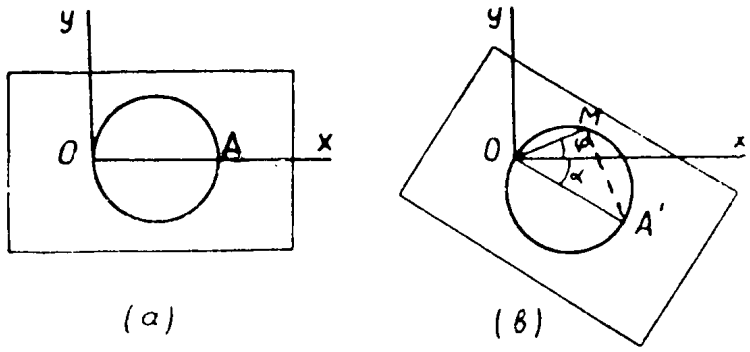
За неподвижную ось x примем начальное положение диаметра OA. К рассматриваемой системе, состоящей из листка бумаги и насекомого

приложены внешние силы в виде сил тяжести, нормальных реакций плоскости и реакции опоры в точке O. Моменты всех этих сил относительно оси Oz, перпендикулярной плоскости чертежа, равны нулю. Поэтому для системы имеет место интеграл (14), который в данном случае запишется в виде

$$K_{1z} + K_{2z} = 0,$$

где K_{1z} и K_{2z} — моменты количеств движения насекомого и бумаги соответственно; общий же момент равен нулю вследствие того, что движение системы началось из состояния покоя.

Будем положение насекомого определять полярными координатами $r = OM$ и φ (фиг. 142 (b)). Тогда момент количества движения насекомого будет $K_{1z} = mr^2\dot{\varphi}$. Считая, что насекомое движется в такую сторону, что его радиус-вектор вращается против стрелки часов, най-



Фиг. 142

дем, что листок бумаги повернется вокруг оси z на некоторый угол α в противоположную сторону, то есть по стрелке часов. Так как листок вращается вокруг оси Oz в отрицательном направлении, то его угловая скорость будет $-\dot{\alpha}$, а кинетический момент равняется $K_{2z} = -I\dot{\alpha}$, где I — момент инерции бумаги относительно оси Oz. Таким образом, уравнение моментов принимает вид:

$$mr^2\dot{\varphi} - I\dot{\alpha} = 0. \tag{a}$$

Пройденная насекомым по окружности дуга $A'M$ равна vt. Выражая ту же дугу через центральный угол окружности, равный $2(\varphi + \alpha)$, найдем:

$$2a(\varphi + \alpha) = vt,$$

откуда

$$\varphi + \alpha = \lambda t \tag{b}$$

где

$$\lambda = \frac{v}{2a}.$$

Из треугольника $A'OM$ имеем

$$r = 2a\cos(\varphi + \alpha),$$

что по (b) дает

$$r = 2a\cos\lambda t. \tag{c}$$

Подставляя это значение r, а также $\dot{\alpha} = \lambda - \dot{\varphi}$ в (a), получаем после деления на I

$$\mu\cos^2\lambda t\cdot\dot{\varphi} - (\lambda - \dot{\varphi}) = 0, \quad \mu = \frac{4ma^2}{I}.$$

Разделяя переменные, находим отсюда

$$d\varphi = \frac{\lambda dt}{1 + \mu \cos^2 \lambda t},$$

что, после деления числителя и знаменателя на $\cos^2 \lambda t$, можно переписать в виде

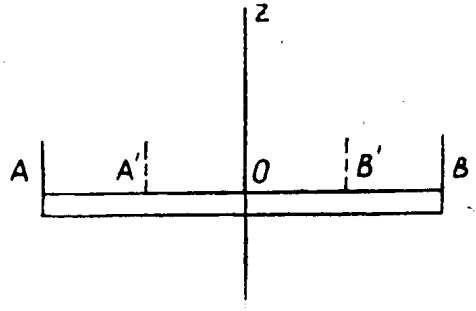
$$d\varphi = \frac{d(\operatorname{tg} \lambda t)}{1 + \mu + \operatorname{tg}^2 \lambda t}.$$

Интегрируя и замечая, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, получаем следующий закон изменения φ:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \lambda t}{\sqrt{1+\mu}}. \qquad (d)$$

Выражения (c) и (d) дают закон движения насекомого, а подставляя значение φ из (d) в (b), найдем $\alpha = \alpha(t)$ — закон движения листка бумаги. Тем самым искомое движение найдено.

Пример 2. Однородная горизонтально расположенная балка с массой m вращается вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через ее средину O (фиг. 143), с угловой скоростью ω_0. На каждом из концов балки



Фиг. 143

стоит по человеку, имеющему ту же массу m. Спрашивается, как изменится угловая скорость вращения системы, если каждый из людей перейдет по балке в положение, находящееся посредине его первоначального удаления от оси вращения.

В рассматриваемой задаче внешние силы — веса балки и людей, а также реакция опоры O — не дают момента относительно оси вращения. Так как при этом в обоих положениях людей система вращается с общей угловой скоростью, то будет справедлив интеграл моментов (15)

$$I\omega = I_0\omega_0.$$

Пусть l — длина балки; тогда момент инерции балки относительно оси вращения будет

$$\frac{1}{12} m l^2.$$

Пренебрегая поперечными размерами людей, найдем, что момент инерции каждого человека в первом положении есть

$$m \frac{l^2}{4},$$

а во втором —

$$m\frac{l^2}{16}.$$

Следовательно, момент инерции системы относительно оси вращения при первом расположении людей равен

$$I_0 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 = \frac{7}{12}ml^2,$$

а при втором —

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{8}ml^2 = \frac{5}{24}ml^2.$$

Подстановка этих значений в интеграл моментов дает после сокращений

$$5\omega = 14\,\omega_0,$$

откуда

$$\omega = 2{,}8\,\omega_0.$$

Таким образом, угловая скорость системы при указанном перемещении людей возрастет в 2,8 раза.

6. Теорема о моменте количества движения для относительного движения системы около центра масс. Введем подвижную систему координат $Cx'y'z'$ с началом в центре масс C системы, движущуюся поступательно вместе с этим центром. Обозначим через r_i' радиус-вектор какой-либо точки системы относительно центра масс. Тогда для радиуса-вектора r_i в неподвижной системе отсчета имеем

$$r_i = r_c + r_i', \qquad \text{(a)}$$

где r_c — радиус-вектор центра масс.

Так как подвижная система отсчета движется поступательно, то для нее $\omega = 0$; поэтому, дифференцируя (a) по времени и используя выражение производной вектора через локальную производную, находим:

$$\dot{r}_i = \dot{r}_c + \tilde{\dot{r}}_i' + \omega \times r_i' = \dot{r}_c + \tilde{\dot{r}}_i',$$

что иначе можно записать в виде

$$v_i = v_c + v_i', \qquad (16)$$

где $v_i' = \tilde{\dot{r}}_i'$ — относительная скорость точки системы по отношению к центру масс (точнее — относительно системы $Cx'y'z'$).

Учитывая, что центр масс находится в начале подвижной системы координат, имеем

$$\sum m_i r_i' = M r_c' = 0. \qquad \text{(b)}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, находим также

$$\sum m_i v_i' = 0. \qquad \text{(c)}$$

Момент количества движения системы относительно неподвижного центра O с помощью равенств (a) и (16) можно представить в виде

$$\boldsymbol{K}=\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i=\sum\{(\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}_i')\times m_i(\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{v}_i')\}=$$

$$=\sum \boldsymbol{r}_c \times m_i \boldsymbol{v}_c+\sum \boldsymbol{r}_c \times m_i \boldsymbol{v}_i'+\sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_c+\sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i'. \quad \text{(d)}$$

Используя соотношения (b) и (c), находим:

$$\sum \boldsymbol{r}_c \times m_i \boldsymbol{v}_i'=\boldsymbol{r}_c \times \sum m_i \boldsymbol{v}_i'=0;$$

$$\sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_c=(\sum m_i \boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{v}_c=0.$$

Для первого члена в (d) имеем:

$$\sum \boldsymbol{r}_c \times m_i \boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_c \sum m_i=\boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{v}_c,$$

где M — масса всей системы. Последняя же сумма

$$\boldsymbol{K}_c=\sum \boldsymbol{r}' \times m_i \boldsymbol{v}_i'$$

представляет собой момент количества движения системы относительно центра масс в ее относительном движении около этого центра.

Таким образом, равенство (d) принимает вид следующего соотношения:

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{K}_c. \quad \text{(e)}$$

Используя то же выражение (a), получаем для главного момента внешних сил относительно центра O:

$$\boldsymbol{L}^{(e)}=\sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}=\sum(\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}=\boldsymbol{r}_c \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}.$$

Но

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}=\boldsymbol{F}^{(e)}$$

есть главный вектор внешних сил, а

$$\boldsymbol{L}_c^{(e)}=\sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

есть главный момент внешних сил относительно центра масс системы. Таким образом,

$$\boldsymbol{L}^{(e)}=\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{F}^{(e)}+\boldsymbol{L}_c^{(e)}.$$

Подставляя это значение, а также выражение (e) в уравнение теоремы моментов (2), получаем:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{v}_c)+\frac{d\boldsymbol{K}_c}{dt}=\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{F}^{(e)}+\boldsymbol{L}_c^{(e)}. \quad \text{(f)}$$

Производя дифференцирование в первом члене, находим:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{v}_c)=\dot{\boldsymbol{r}}_c \times M \boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{w}_c=\boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{w}_c, \quad \text{(g)}$$

ибо $\dot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{v}_c$ и первый член как векторное произведение коллинеарных векторов равен нулю.

Подставляя (g) в (f) и замечая, что по теореме о движении центра масс $M\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{F}^{(e)}$, видим, что первые члены в обеих частях равенства взаимно уничтожаются, и мы приходим к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{K}_c}{dt} = \boldsymbol{L}_c^{(e)}. \tag{17}$$

Это уравнение и выражает искомую теорему. Видим, что теорема моментов для движения системы относительно центра масс имеет тот же вид, что и для абсолютного движения с той только разницей, что оба момента берутся относительно движущегося центра масс, а не относительно неподвижной точки.

Отсюда вытекает, что в частных случаях будут иметь место интегралы площадей, аналогичные ранее рассмотренным. Так, если $\boldsymbol{L}_c^{(e)} = 0$, то будет существовать векторный интеграл

$$\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{c}$$

с соответствующими тремя проекциями на подвижные оси координат. Если же равен нулю главный момент внешних сил лишь относительно одной из этих осей, например, относительно подвижной оси z (знак штрих опускаем), проходящей через центр масс, то получим только один скалярный интеграл

$$K_{cz} = c. \tag{18}$$

Наконец, если в этом случае движение относительно оси z есть вращение с общей для всей системы угловой скоростью ω, то будем иметь интеграл моментов в виде

$$I\omega = I_0\omega_0, \tag{19}$$

где I есть момент инерции системы относительно подвижной оси вращения.

Так, например, цирковой акробат, подпрыгнув и придав себе вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости прыжка и проходящей через его центр масс, подтягивает ноги и руки, свертываясь в клубок; тем самым он значительно уменьшает свой момент инерции относительно оси вращения, вследствие чего, согласно (19), возрастает его угловая скорость, и он успевает перевернуться в воздухе и стать на ноги.

Из интеграла (18) вытекает важное следствие о том, что внутренние силы системы могут изменять вращательное движение системы вокруг своего центра масс. В самом деле, пусть, например, некоторая система движется

поступательно, что возможно только в том случае, если главный момент внешних сил относительно центра масс равен нулю. Тогда для любой оси z, проходящей через центр масс, постоянная c в интеграле (18) равна нулю. Пусть, далее, внутренние силы системы сообщили одной своей части вращение вокруг оси z с некоторой угловой скоростью ω_1. Тогда остальная часть системы придет во вращение вокруг той же оси в противоположном направлении с угловой скоростью ω_2, определяемой равенством

$$I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = 0, \tag{20}$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции соответствующих частей относительно оси вращения.

Можно привести ряд примеров, иллюстрирующих последний вывод. Так, брошенная кошка, как известно, всегда падает на ноги. Полеты кошки снимались на пленку и затем просматривались на экране в замедленном темпе. Оказалось, что кошка, усиленно вращая во время полета головой и хвостом в определенную сторону, заставляет свое туловище, согласно (20), повернуться в противоположном направлении на необходимый угол.

Парашютист, совершающий затяжной прыжок с самолета, вращением рук и ног может заставить свое тело повернуться так, чтобы оказаться летящим лицом к земле.

На уравнении (20) основывается также проект придания космическому кораблю или спутнику Земли вращения вокруг некоторой оси с целью создания центробежных инерционных сил, которые бы могли служить эквивалентом силы тяжести. Для этого достаточно привести во вращение какое-либо массивное тело, установленное на корабле или спутнике; тогда вся остальная масса придет во вращение в противоположном направлении.

§ 34. Теорема кинетической энергии системы

1. Кинетическая энергия системы. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий всех ее точек. Будем обозначать ее буквой T. Таким образом,

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2, \tag{1}$$

что в декартовых координатах можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2}\sum m_\nu \dot{x}_\nu^2. \tag{2}$$

Кинетической энергии системы часто дается другое представление, удобное для приложений. Возьмем, как

и при рассмотрении предыдущей теоремы, подвижную систему координат с началом в центре масс, движущуюся поступательно вместе с ним. Тогда, согласно (33—16), скорость каждой точки системы может быть взята в форме

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_i'$$

где $\boldsymbol{v}_c$ — скорость центра масс, а $\boldsymbol{v}_i'$ — относительная скорость точки в движении системы относительно центра масс. Подставляя это выражение в (1), имеем:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2}\sum m_i \{(\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_i')\cdot(\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_i')\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_c \cdot \boldsymbol{v}_c + \sum m_i \boldsymbol{v}_c \cdot \boldsymbol{v}_i' + \frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_i' \cdot \boldsymbol{v}_i' =$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \boldsymbol{v}_c \cdot \sum m_i \boldsymbol{v}_i' + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2.$$

Как мы видели,

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0;$$

поэтому окончательно получим:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2. \qquad (3)$$

Этот результат формулируется в виде следующей *теоремы Кёнига.*

Кинетическая энергия системы материальных точек равна кинетической энергии центра масс системы, определенной в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы, сложенной с кинетической энергией относительного движения системы около центра масс.

В частности, если относительное движение около центра масс является чистым вращением около него, то, как известно,

$$v_i' = \omega \rho_i, \qquad (а)$$

где ρ_i — расстояние точки от мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс, а ω — угловая скорость системы относительно этой оси. Тогда

$$\sum m_i v_i'^2 = \omega^2 \sum m_i \rho_i^2 = I\omega^2,$$

где I — момент инерции системы относительно указанной мгновенной (или постоянной) оси вращения. Подставляя это выражение в (3), находим

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \qquad (4)$$

Так как в абсолютно твердом теле расстояния точек от центра масс тела не могут изменяться, то относительное движение тела по отношению к центру масс может быть только вращением; поэтому кинетическая энергия абсолютно твердого тела всегда может быть определена по формуле (4).

В частном случае вращения системы вокруг неподвижной точки или оси полная скорость точки может быть представлена в виде (а). Подставляя это выражение в (1), найдем для этого случая

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{5}$$

где I будет моментом инерции системы относительно постоянной или мгновенной оси вращения, проходящей через неподвижную точку. Если, например, абсолютно твердое тело имеет такую точку, то его кинетическую энергию следует определять по последней формуле.

2. Теорема кинетической энергии. Разделяя силы системы на внешние и внутренние, можем теорему кинетической энергии в дифференциальной форме для какой-либо точки системы записать в виде

$$d\frac{m_i v_i^2}{2} = \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_i^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_i.$$

Суммируя эти равенства по всем точкам системы и меняя в левой части порядок дифференцирования и суммирования, получаем

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}, \tag{6}$$

где $d'A^{(e)} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i$ — элементарная работа внешних, а $d'A^{(i)} = \sum \mathbf{F}_i^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_i$ — элементарная работа внутренних сил системы. Равенство (6) выражает теорему кинетической энергии для системы в элементарной форме.

Дифференциал кинетической энергии системы материальных точек равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил системы.

Пусть в начальном положении I система имеет кинетическую энергию T_0, а в конечном II — кинетическую энергию T. Интегрируя равенство (6) вдоль путей перемещения точек от начального положения до конечного, находим:

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}, \tag{7}$$

где $A^{(e)} = \int\limits_{(I)}^{(II)} d'A^{(e)} = \int\limits_{(I)}^{(II)} \sum \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i$ — работа внешних сил на

рассматриваемом перемещении, а $A^{(i)} = \int\limits_{(I)}^{(II)} d'A^{(i)} = \int\limits_{(I)}^{(II)} \sum \boldsymbol{F}_l^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_l$ — работа внутренних сил на том же перемещении. Получили теорему кинетической энергии для конечного перемещения системы.

Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно работе внешних и внутренних сил системы на этом перемещении.

Работа сил вычисляется в зависимости от характера сил так, как это было указано для одной материальной точки.

Видим, что в отличие от предыдущих теорем в данной теореме внутренние силы в общем случае не исключаются. Однако легко убедиться, что если система является абсолютно твердым телом, то работа внутренних сил равна нулю. В самом деле, силы взаимодействия, действующие между любыми двумя точками тела, мы можем представить как реакции некоторого воображаемого идеального стержня, соединяющего эти точки, причем эти реакции равны друг другу по величине и направлены прямо противоположно по прямой, соединяющей точки. В силу же неизменности взаимных расстояний между точками абсолютно твердого тела, возможны лишь такие действительные элементарные перемещения взятых двух точек, проекции которых на направление стержня одинаковы. Поэтому, как и в примере, в котором рассматривалась элементарная виртуальная работа реакций нерастяжимого стержня (§ 30, п. 6), элементарная работа сил взаимодействия двух точек окажется равной нулю. Следовательно, будет равна нулю и работа всех внутренних сил.

В число внешних и внутренних сил системы могут входить как активные силы, так и реакции связей. Поэтому, теорему кинетической энергии можно записать еще в форме

$$dT = d'A_F + d'A_R, \tag{8}$$

где

$$d'A_F = \sum \boldsymbol{F}_l \cdot d\boldsymbol{r}_l$$

есть элементарная работа активных сил, а

$$d'A_R = \sum \boldsymbol{R}_l \cdot d\boldsymbol{r}_l$$

— элементарная работа реакций связей.

В аналитической статике мы видели, что при идеальных удерживающих связях виртуальная работа реакций связей равна нулю. Если еще эти связи голономны и склерономны, то действительные элементарные перемещения будут совпадать с одной из совокупностей виртуальных, и поэтому в этом случае будет $d'A_R = 0$, и (8) принимает вид $dT = d'A_F$, такой же, как и для свободной системы.

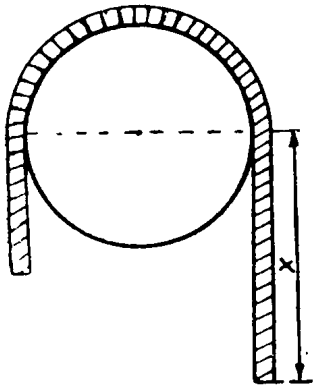
Если при этом активные силы имеют потенциал U, так что $\mathbf{F}_i = \operatorname{grad}_i U$, то

$$d'A_F = \sum \operatorname{grad}_i U \cdot d\mathbf{r}_i = dU.$$

Подставляя это значение в предыдущее равенство и интегрируя, получаем интеграл энергии

$$T = U + h, \tag{9}$$

где h — постоянная интегрирования. Таким образом, если активные силы консервативны и система свободна или подчинена идеальным голономным и склерономным связям, то имеет место интеграл энергии (9).



Фиг. 144

Интеграл (9) может иметь место и при неидеальных связях, если элементарная работа реакций связей равна нулю. Например, при качении тела по шероховатой поверхности без скольжения элементарное перемещение точки соприкосновения со связью равно нулю, поэтому будет равна нулю и работа реакции этой связи.

Пример 1. Однородная тяжелая цепочка длиною l положена на идеально гладкую поверхность неподвижного кругового цилиндра радиуса a с горизонтальной осью так, что длина одной ее свешивающейся части вдвое больше длины другой (фиг. 144). Предоставленная самой себе, цепочка начинает скользить по цилиндру. Найти скорость цепочки в момент, когда конец ее более короткой части достигнет поверхности цилиндра.

Цепочка будет двигаться под влиянием избытка веса более длинной свешивающейся части. Обозначим переменную длину этой части нити через x. Тогда длина другой свешивающейся части будет $l - \pi a - x$, а избыток длины первой части будет

$$x - (l - \pi a - x) = 2x - (l - \pi a).$$

Следовательно, если обозначить через γ линейный удельный вес цепочки, она будет двигаться под действием силы

$$\gamma [2x - (l - \pi a)],$$

имеющей потенциал

$$U = \gamma [x^2 - (l - \pi a) x].$$

Так как связь идеальна и неподвижна, то применяем интеграл (9). Скорости всех точек нити одинаковы по величине, и поэтому этот интеграл принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma [x^2 - (l - \pi a) x] + h'.$$

Подставляя еще $m = \frac{\gamma l}{g}$, имеем:

$$v^2 = \frac{2g}{l} [x^2 - (l - \pi a) x] + h. \tag{a}$$

В начальный момент $v = 0$, $x = \frac{2}{3}(l - \pi a)$. Из этого условия подстановкой в (а) находим:

$$h = \frac{4}{9}\frac{g}{l}(l - \pi a)^2.$$

В момент, когда конец короткой части достигнет цилиндра, будет

$$x = l - \pi a.$$

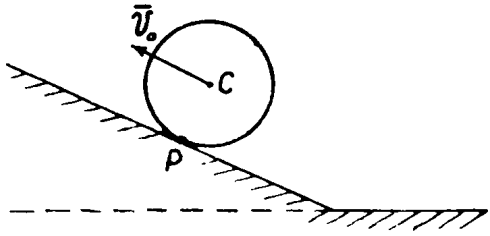
Подставляя это значение в (а), получаем

$$v^2 = h = \frac{4}{9}\frac{g}{l}(l - \pi a)^2,$$

откуда

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}(l - \pi a).$$

Пример 2. Центру однородного тяжелого диска, помещенного на наклонную плоскость, сообщена начальная скорость v_0, направленная вверх параллельно плоскости (фиг. 145). Определить максимальную высоту h,



Фиг. 145

на которую поднимется центр диска в двух случаях: 1) диск скользит по плоскости без качения, 2) диск катится без скольжения.

Отсутствие качения в первом случае говорит об отсутствии силы трения, то есть об идеальности связи. Наличие же одного только качения во втором случае означает, что элементарное перемещение точки P соприкосновения диска с плоскостью равно нулю, и поэтому работа реакции плоскости тоже равна нулю. Следовательно, в обоих случаях работа будет состоять только из работы активной силы, которой здесь является сила тяжести. Так как силу тяжести можем считать приложенной в центре диска, то эта работа будет $A = -Mgh$, где M — масса диска.

Максимальная высота, на которую поднимется центр диска, будет отвечать моменту остановки диска. Поэтому в обоих случаях конечная кинетическая энергия обратится в $T = 0$.

При чистом скольжении диск будет двигаться поступательно, $\omega = 0$, поэтому по теореме Кёнига начальная кинетическая энергия будет $T_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2$. Следовательно, уравнение теоремы кинетической энергии

$$T - T_0 = A$$

в первом случае дает

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = Mgh_1$$

откуда

$$h_1 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

При чистом качении точка P будет мгновенным центром скоростей — следом мгновенной оси вращения, проходящей через P и перпендикулярной плоскости чертежа.

Поэтому кинетическая энергия диска в начальный момент найдется по формуле

$$T_0 = \frac{1}{2} I\omega_0^2,$$

где I — момент инерции диска относительно мгновенной оси вращения, равный по теореме Штейнера:

$$I = I_c + Ma^2 = \frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2;$$

здесь a — радиус диска. Из теории плоско-параллельного движения известно, что начальная угловая скорость диска будет

$$\omega_0 = \frac{v_0}{a}.$$

Следовательно, получим

$$T_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}Ma^2\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{3}{4}Mv_0^2.$$

Тогда теорема кинетической энергии дает

$$\frac{3}{4}Mv_0^2 = Mgh_2,$$

откуда

$$h_2 = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}.$$

Видим, что

$$h_2 = \frac{3}{2}h_1,$$

то есть в случае качения центр диска поднимется в полтора раза выше, чем при скольжении.

3. Полная энергия и закон сохранения энергии. В теоретической механике принимается, что внутренние силы взаимодействия, действующие между любыми двумя точками системы, зависят только от расстояния между этими точками. Легко показать, что при этом предположении внутренние силы всегда имеют потенциал.

С этой целью возьмем две точки системы M_i и M_κ (фиг. 146), положение которых относительно некоторого центра определяется радиусами-векторами r_i и r_κ соответственно. Введем также вектор

$$\rho_{i\kappa} = r_\kappa - r_i. \qquad \text{(а)}$$

Силы взаимодействия $\mathbf{F}_{i\kappa}^{(i)}$ и $\mathbf{F}_{\kappa i}^{(i)}$ направлены по линии действия этого вектора в противоположные стороны, причем,

согласно принятому условию, модули этих сил будут зависеть только от расстояния между точками, то есть

$$F_{i\kappa}^{(i)} = F_{\kappa i}^{(i)} = F(\rho_{i\kappa}).$$

Для элементарной работы этих двух сил, согласно (а) и равенству $\boldsymbol{F}_{\kappa i}^{(i)} = -\boldsymbol{F}_{i\kappa}^{(i)}$, имеем:

$$d'A_{i\kappa}^{(i)} = \boldsymbol{F}_{i\kappa}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{\kappa i}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_\kappa = -\boldsymbol{F}_{i\kappa}^{(i)} \cdot (d\boldsymbol{r}_\kappa - d\boldsymbol{r}_i) = -\boldsymbol{F}_{i\kappa}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_{i\kappa};$$

$$\boldsymbol{F}_{i\kappa}^{(i)} = F(\rho_{i\kappa}) \frac{\boldsymbol{\rho}_{i\kappa}}{\rho_{i\kappa}}.$$

Поэтому

$$d'A_{i\kappa}^{(i)} = -\frac{F(\rho_{i\kappa})}{\rho_{i\kappa}} \boldsymbol{\rho}_{i\kappa} \cdot d\boldsymbol{\rho}_{i\kappa}.$$

Далее

$$\boldsymbol{\rho}_{i\kappa} \cdot d\boldsymbol{\rho}_{i\kappa} = \frac{1}{2} d(\boldsymbol{\rho}_{i\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i\kappa}) = \frac{1}{2} d(\rho_{i\kappa}^2) = \rho_{i\kappa} d\rho_{i\kappa}.$$

Следовательно,

$$d'A_{i\kappa}^{(i)} = -F(\rho_{i\kappa})\, d\rho_{i\kappa}.$$

Если ввести теперь первообразную функцию

$$U_{i\kappa}^{(i)} = -\int F(\rho_{i\kappa})\, d\rho_{i\kappa},$$

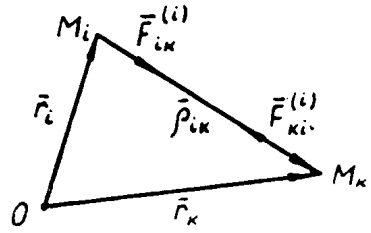
то

$$d'A_{i\kappa}^{(i)} = dU_{i\kappa}^{(i)},$$

и поэтому функция $U_{i\kappa}^{(i)} = U_{i\kappa}^{(i)}(\rho_{i\kappa})$ будет потенциалом двух сил взаимодействия рассматриваемых точек.

Работа всех внутренних сил получится двойным суммированием полученных выражений по индексам i и κ. Так как, однако, $d'A_{\kappa i}^{(i)} = d'A_{i\kappa}^{(i)}$, то в такую сумму работа сил взаимодействия каждых двух точек войдет дважды. Поэтому работа внутренних сил будет

$$d'A^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,\kappa=1}^{n} d'A_{i\kappa}^{(i)},$$



Фиг. 146

откуда следует, что функция

$$U^{(i)} = -\frac{1}{2} \sum_{i,\kappa=1}^{n} \int F(\rho_{i\kappa})\, d\rho_{i\kappa} \qquad (10)$$

будет потенциалом всех внутренних сил системы. Легко убедиться непосредственным дифференцированием, что дей-

ствительно в этом случае для равнодействующей внутренних сил, действующих на точку M_i, будем иметь

$$\boldsymbol{F}_i^{(i)} = \operatorname{grad}_i U^{(i)},$$

если учесть при этом, что

$$\rho_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}.$$

Введем теперь потенциальную энергию $V^{(i)}$ внутренних сил соотношением

$$V^{(i)} = -U^{(i)} + \text{const}.$$

Эту функцию называют *внутренней потенциальной энергией системы*. Тогда для элементарной работы внутренних сил получим

$$d'A^{(i)} = dU^{(i)} = -dV^{(i)},$$

и теорема кинетической энергии в форме (6) примет вид:

$$d(T + V^{(i)}) = d'A^{(e)}. \tag{11}$$

Сумма кинетической и внутренней потенциальной энергий часто называется *полной энергией системы*. Вводя обозначение

$$E = T + V^{(i)},$$

можем (11) переписать в виде

$$dE = d'A^{(e)}. \tag{11'}$$

Интегрируя это соотношение от начального положения системы до конечного, находим

$$E - E_0 = A^{(e)}. \tag{12}$$

Изменение полной энергии системы при ее переходе из одного положения в другое равно работе внешних сил на этом перемещении.

Если внешние силы отсутствуют, то $A^{(e)} = 0$ и из (12) следует:

$$E = E_0,\ T + V^{(i)} = T_0 + V_0^{(i)}. \tag{13}$$

Получили закон сохранения энергии:

Если система материальных точек движется при отсутствии внешних сил, то ее полная энергия остается постоянной во все время движения.

Таким образом, в этом случае возможен лишь переход кинетической энергии во внутреннюю потенциальную энергию системы и обратно.

Внутренняя потенциальная энергия системы определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Эту постоянную можно выбрать как угодно. Выберем ее из ус-

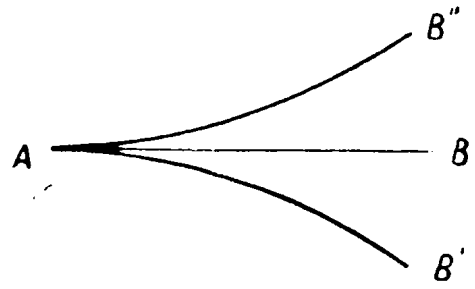
ловия, чтобы энергия $V^{(l)}$ обращалась в нуль в том положении системы I, в котором она имеет минимум, а при наличии нескольких минимумов—в положении, отвечающем наименьшему минимуму. Тогда во всех других положениях эта энергия будет положительной.

Механический смысл внутренней потенциальной энергии системы в ее произвольном положении II легко установить, подсчитав работу внутренних сил при переходе системы из положения II в положение I. Будем иметь для этой работы

$$A^{(l)} = \int_{(II)}^{(I)} dU^{(l)} = U_I^{(l)} - U_{II}^{(l)} = V_{II}^{(l)} - V_I^{(l)} = V_{II}^{(l)},$$

так как $V_I^{(l)} = 0$. Следовательно, *внутренняя потенциальная энергия системы в каком-либо ее положении равна той работе внутренних сил, которую они совершат при переходе системы из рассматриваемого положения в положение, принятое за нуль этой потенциальной энергии.*

Пример. Возьмем упругую пластинку с зажатым неподвижно концом A (фиг. 147). Пусть при отсутствии внешних сил пластинка занимает положение равновесия AB. Если теперь отклонить пластинку в положение AB', прилагая некоторую внешнюю силу к концу B и держа ее в этом положении неподвижно, то работа приложенной силы пойдет только на увеличение внутренней потенциальной энергии системы. Следовательно, в положении AB эта потенциальная энергия имеет минимум, который мы примем равным нулю.



Фиг. 147

Обозначим внутреннюю потенциальную энергию пластинки в положении AB' через $V_0^{(l)}$); одновременно она будет являться и полной энергией системы E в этом положении. Если после указанного отклонения предоставить пластинку самой себе, то она придет в движение, которое в силу отсутствия внешних сил будет подчиняться закону сохранения энергии (13), принимающему в данном случае вид

$$T + V^{(l)} = V_0^{(l)}.$$

Поэтому, с уменьшением энергии $V^{(l)}$ по мере приближения к положению AB, кинетическая энергия T будет возрастать, достигая максимума $T = V_0^{(l)}$ в момент прохождения через положение равновесия AB. После перехода через AB внутренняя потенциальная энергия начнет возрастать, а кинетическая—убывать до тех пор, пока пластинка не займет положение AB'', симметричное с AB', в котором снова кинетическая энергия обратится в нуль. Дальше будем иметь повторение процесса.

Часто вместо (13) под законом сохранения энергии понимается другое более общее соотношение. Именно, до-

пустим, что внешние силы системы имеют потенциал $U^{(e)}$, так что

$$\boldsymbol{F}_i^{(e)} = grad_i\, U^{(e)}.$$

Тогда, вводя потенциальную энергию внешних сил

$$V^{(e)} = -\,U^{(e)} + \text{const},$$

называемую *внешней потенциальной энергией*, будем иметь

$$d'\,A^{(e)} = dU^{(e)} = -\,dV^{(e)},$$

и соотношение (11) принимает вид

$$d\,(T + V^{(i)} + V^{(e)}) = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$T + V^{(i)} + V^{(e)} = T_0 + V_0^{(i)} + V_0^{(e)}. \qquad (14)$$

Это равенство тоже называют законом сохранения энергии, причем сумма $T + V^{(i)} + V^{(e)}$ также называется полной энергией системы; в дальнейшем полную энергию системы будем понимать именно в этом смысле. Формулировка закона (14) будет:

Если внешние силы имеют потенциал, то полная энергия системы, равная кинетической энергии, сложенной с внутренней и внешней потенциальными энергиями, остается постоянной во все время движения.

При отсутствии внешних сил можно принять $V^{(e)} = 0$; поэтому закон сохранения энергии в форме (13) является частным случаем того же закона, взятого в форме (14).

Введенный ранее потенциал U активных сил равен сумме потенциалов внутренних и внешних сил. Следовательно,

$$U = U^{(i)} + U^{(e)} = -\,V^{(i)} - V^{(e)} + \text{const}.$$

Отсюда вытекает, что полученный нами закон (14) представляет собой иную запись интеграла энергии (9). Поэтому, как и этот интеграл, закон сохранения энергии справедлив не только для свободной системы, но также и для всякой голономной системы, подчиненной идеальным и склерономным связям.

Вопрос о существовании интеграла энергии для неголономной системы рассмотрим позднее.

В заключение заметим, что, как и в динамике точки, при наличии внешних сил, не имеющих потенциала, невыполнение закона сохранения энергии означает лишь переход части механической энергии в другие виды энергии или же обратный переход других видов энергии в механическую; при этом общефизический закон сохранения энергии остается, конечно, в силе.

Глава II

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 35. Принципы Даламбера и Даламбера — Лагранжа

1. Принцип Даламбера. Известный из динамики точки принцип Даламбера может быть распространен на движение системы материальных точек в двух видах.

Первый вид получается простым применением принципа к каждой точке системы. Предполагая систему в общем случае несвободной и беря уравнение движения каждой точки в виде (32—1)

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

получаем уравнение принципа

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{I}_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots n), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{I}_i = -m_i \boldsymbol{w}_i$ — сила инерции для данной точки. Поэтому известные из динамики точки формулировки принципа полностью применимы и к каждой точке системы. Ограничимся основной формулировкой:

Уравнениям движения отдельных точек системы можно придать вид уравнений статики, если к действующим на них активным и пассивным силам присоединить фиктивные силы инерции.

При решении задач уравнения (1) можно проектировать на любые направления, в частности на выбранные оси декартовых координат. Для несвободной системы к получающимся уравнениям следует присоединить уравнения связей, что обычно и позволяет полностью решить данную задачу.

Пример. Система двух блоков, указанная на чертеже (фиг. 148), несет с помощью нити два груза M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 соответственно. Пренебрегая массами блоков и нити и считая нить нерастяжимой, найти ускорение груза M_2.

Груз M_2 будет вызывать в нити некоторое натяжение T. Поэтому на груз, помимо силы тяжести, будет действовать реакция нити, равная T и направленная вверх. Проектируя уравнение (1) для этого груза на направленную вниз вертикальную ось z, приходим к уравнению

$$m_2 g - T - m_2 \ddot{z}_2 = 0, \qquad (a)$$

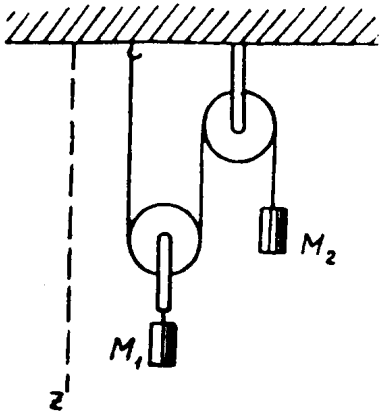
ибо $I_{2z} = -m_2 \ddot{z}_2$, где z_2 — координата груза M_2.

Блок, к которому прикреплен груз M_1, поддерживается двумя ветвями нити, в каждой из которых действует то же натяжение T. Следовательно, направленная вверх реакция для груза M_1 будет равна $2T$, и уравнение принципа для этого груза имеет вид

$$m_1 g - 2T - m_1 \ddot{z}_1 = 0. \qquad \text{(b}$$

В уравнениях (a) и (*b*) имеем три неизвестных—натяжение T и ускорения грузов $\ddot{z}_1$ и $\ddot{z}_2$. Поэтому необходимо составить еще уравнение связи, которым явится условие нерастяжимости нити

$$2z_1 + z_2 = \text{const}.$$



Фиг. 148

Дифференцируя дважды по времени это условие, находим

$$2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0. \qquad \text{(c)}$$

Получили третье недостающее уравнение.

Исключая сначала из уравнений (a) и (b) T, получаем:

$$(2m_2 - m_1) g - 2m_2 \ddot{z}_2 + m_1 \ddot{z}_1 = 0.$$

Подставляя сюда $\ddot{z}_1 = -\frac{\ddot{z}_2}{2}$ из (c), имеем:

$$(2m_2 - m_1) g - \left(2m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\ddot{z}_2 = 0,$$

откуда получаем решение задачи:

$$\ddot{z}_2 = \frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1} g.$$

Видим, что груз M_2 будет иметь ускорение $\ddot{z}_2 > 0$ только при условии

$$m_2 > \frac{m_1}{2}.$$

В этом случае из состояния покоя M_2 будет опускаться вниз.

Второй вид принципа Даламбера получается составлением уравнений типа уравнений статики для системы в целом. Суммируя уравнения (1) по всем точкам системы, находим:

$$\sum \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{R}_i + \sum \boldsymbol{I}_i = 0. \qquad (2)$$

Умножая векторно слева каждое уравнение (1) на радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$ данной точки и опять суммируя получающиеся равенства, имеем

$$\sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i + \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{I}_i = 0. \qquad (3)$$

Векторные уравнения (2) и (3) выражают принцип в его втором виде, которому можно дать формулировку:

При движении системы в каждый момент времени главный вектор и главный момент активных сил, реакций связей и сил инерции равны нулю.

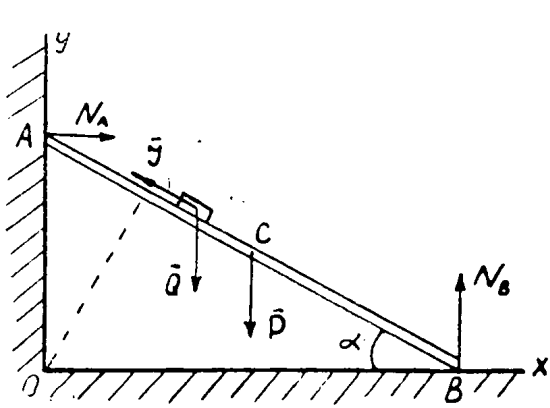
При проектировании (2) и (3) на оси декартовых координат получим шесть уравнений движения системы, записанных в форме уравнений статики.

Чтобы подчеркнуть фиктивность сил инерции, принципу Даламбера можно дать еще такую классическую формулировку:

Если в какой-либо момент времени систему материальных точек мгновенно остановить и приложить к ней реальные силы, равные силам инерции, то система останется в покое и во все последующее время.

Принцип Даламбера во второй его форме особенно удобен в тех случаях, когда одна часть системы неподвижна, а другая находится в ускоренном движении. Прилагая к этой второй части силы, равные силам инерции, и составляя для всей системы основные уравнения статики, находим из последних решение задачи.

Пример. Однородная балка длиною $AB = 2l$ (фиг. 149) и весом P, составляющая угол α с горизонтом, опирается концом A на гладкую стенку, а концом B—на гладкий пол. По балке от точки A бежит жи-



Фиг. 149

вотное, имеющее вес Q. Найти, при каком законе движения животного балка останется неподвижной.

Обозначим через s путь, проходимый животным по балке от точки A. К действующим активным силам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и реакциям стены и пола $\boldsymbol{N_A}$ и $\boldsymbol{N_B}$ добавляем силу инерции животного I, считая ее действующей вдоль балки. При $\ddot{s} > 0$ эта сила направлена к точке A и имеет величину

$$I = \frac{Q}{g}\ddot{s}. \qquad (a)$$

Выбирая оси x и y как указано на чертеже, составим уравнения принципа Даламбера как уравнения статики для плоской задачи, то есть запишем два уравнения, говорящие о равенстве нулю сумм проекций сил на оси координат, и одно уравнение, выражающее равенство нулю суммы моментов всех сил относительно начала координат:

$$\sum X \equiv N_A - I\cos\alpha = 0,$$

$$\sum Y \equiv -P - Q + N_B + I\sin\alpha = 0;$$

$$\sum L \equiv -Pl\cos\alpha - Qs\cos\alpha - N_A \cdot 2l\sin\alpha + N_B \cdot 2l\cos\alpha +$$

$$+ I \cdot 2l\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

При составлении уравнения моментов принято во внимание, что силу веса балки P можно считать приложенной в среднем сечении C балки.

Значения реакций

$$N_A = I\cos\alpha,\ N_B = P + Q - I\sin\alpha,$$

получаемые из первых уравнений, подставляем в уравнение моментов, которое после сокращения на $\cos\alpha$ и приведения подобных принимает вид:

$$Pl - Qs + 2Ql - 2Il\sin\alpha = 0.$$

Подставляя сюда значение I из (a), приходим к уравнению

$$2\frac{Q}{g}\, l\sin\alpha \cdot \ddot{s} + Qs = (P + 2Q)\, l$$

или

$$\ddot{s} + n^2 s = \frac{P + 2Q}{2Q\sin\alpha}\, g, \qquad \text{(b)}$$

где

$$n^2 = \frac{g}{2l\sin\alpha}.$$

Частное решение уравнения (b) есть

$$s = \frac{P + 2Q}{2Q\sin\alpha}\,\frac{g}{n^2} = \frac{P + 2Q}{Q}\, l.$$

Поэтому общее решение будет

$$s = A\cos nt + B\sin nt + \frac{P + 2Q}{Q}\, l,$$

где A и B — произвольные постоянные. Это есть движение по закону простого гармонического колебания.

2. Принцип Даламбера—Лагранжа. Принцип виртуальных перемещений или принцип Лагранжа, справедливый для равновесия системы, может быть распространен и на ее движение. С этой целью возьмем уравнения (1) принципа Даламбера

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{I}_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

умножим каждое скалярно на виртуальное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_i$ данной точки и результат просуммируем. Тогда получим

$$\sum(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{I}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0.$$

В динамике системы мы ограничимся всюду в дальнейшем

рассмотрением систем, подчиненных только удерживающим связям. Тогда при идеальных связях последняя сумма в полученном равенстве обратится в нуль. Подставляя еще значение

$$\boldsymbol{I}_i = -m_i \boldsymbol{w}_i,$$

приходим к уравнению:

$$\sum (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{w}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \tag{4}$$

называемому *общим уравнением механики* или *принципом Даламбера—Лагранжа*, говорящем о следующем.

При движении системы материальных точек, подчиненной идеальным удерживающим связям, в каждый момент времени элементарная работа активных сил и сил инерции на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

Через проекции векторов на оси декартовых координат общее уравнение механики может быть записано в виде

$$\sum \{(X_i - m_i \ddot{x}_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\,\delta z_i\} = 0 \tag{5}$$

или более кратко

$$\sum (X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu)\,\delta x_\nu = 0. \tag{5'}$$

Как и в случае равновесия, данный принцип можно распространить и на случай системы, подчиненной неидеальным удерживающим связям, включая в уравнение принципа виртуальную работу тех составляющих реакций, которые делают связи неидеальными.

Принцип Даламбера—Лагранжа называется общим уравнением механики по той причине, что из него можно получить все основные уравнения механики.

Так, допустим, что система находится в равновесии. Тогда все $\boldsymbol{w}_i = 0$ и уравнение (4) переходит в уравнение

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

то есть переходит в принцип Лагранжа, являющийся наиболее общим условием равновесия системы.

Если система находится в движении и является свободной, то все проекции виртуальных перемещений не связаны никакими условиями и совершенно произвольны. Поэтому уравнение принципа (5) или (5′) может иметь место только при равенстве нулю всех коэффициентов при вариациях координат, что дает уравнения движения точек свободной системы:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Что же касается уравнений движения несвободной системы, то мы далее как раз и займемся получением этих уравнений из данного принципа.

Это фундаментальное значение принципа Даламбера—Лагранжа позволило Лагранжу в его „Аналитической механике" взять этот принцип за исходную аксиому и на ее основе построить все содержание механики.

Решение задач с помощью общего уравнения механики делается совершенно аналогично решению задач о равновесии системы с помощью принципа виртуальных перемещений. Именно, введением независимых обобщенных координат или прямым исключением зависимых вариаций из условий, налагаемых связями, приводят уравнение (5) к виду, содержащему лишь независимые вариации. Приравнивая коэффициенты при них нулю, получают систему уравнений, используемую для решения задач. При этом, решая задачу в декартовых координатах, нужно полученные уравнения рассматривать совместно с уравнениями связей и условиями, получающимися дифференцированием этих уравнений; при решении же задачи в обобщенных независимых координатах—заменить декартовы координаты и их производные, используя выражения декартовых координат через независимые.

Пример. Решим ту же задачу об определении ускорения груза M_2 (фиг. 148), рассмотренную выше, с помощью общего уравнения механики.

Так как эта задача имеет одно измерение, а активными силами являются силы тяжести, то уравнение (5) примет вид:

$$m_1 (g - \ddot{z}_1)\,\delta z_1 + m_2 (g - \ddot{z}_2)\,\delta z_2 = 0. \qquad (a)$$

Из уравнения связи

$$2 z_1 + z_2 = \text{const}$$

имеем

$$2\,\delta z_1 + \delta z_2 = 0, \quad 2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0.$$

Принимая за независимую координату z_2 и за независимую вариацию δz_2, имеем отсюда

$$\delta z_1 = -\frac{\delta z_2}{2}, \qquad \ddot{z}_1 = -\frac{\ddot{z}_2}{2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (а), приводим его к виду

$$\{-m_1 (2g + \ddot{z}_2) + 4 m_2 (g - \ddot{z}_2)\}\,\delta z_2 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при оставшейся независимой вариации, находим из получающегося уравнения прежний ответ:

$$\ddot{z}_2 = \frac{4 m_2 - 2 m_1}{4 m_2 + m_1} g.$$

§ 36. Уравнения движения голономных систем

1. Уравнения движения в декартовых координатах. Будем рассматривать движение системы ма-

териальных точек, подчиненной голономным связям с уравнениями

$$f_j(x, t) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa). \tag{1}$$

Тогда в общем уравнении механики

$$\sum (X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu)\,\delta x_\nu = 0 \tag{2}$$

κ вариаций координат окажутся, как мы видели ранее (§ 30, п. 5), функциями от остальных $N-\kappa$ вариаций в силу условий

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa), \tag{3}$$

налагаемых связями на виртуальные перемещения.

Для получения уравнений движения общего вида применим, как и при получении уравнений равновесия, метод множителей Лагранжа. Каждое условие (3) умножим на произвольный множитель λ_j и результаты умножения сложим между собой и с уравнением (2). Тогда, объединяя члены с одинаковыми вариациями, придем к равенству:

$$\sum \left(X_\nu + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} - m_\nu \ddot{x}_\nu \right) \delta x_\nu = 0. \tag{а}$$

Множители λ_j подбираем так, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях обратились в нуль, что всегда возможно сделать, ибо это эквивалентно отысканию решения κ неоднородных линейных уравнений относительно κ неизвестных λ_j, причем определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля, Тогда в уравнении (а) останутся только члены с независимыми вариациями. В силу произвольности этих вариаций коэффициенты при них тоже должны равняться нулю.В результате приходим к следующим дифференциальным уравнениям движения системы в декартовых координатах:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{4}$$

или более подробно:

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \\ (i &= 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Эти уравнения часто называют еще *уравнениями движения Лагранжа с неопределенными множителями* или *уравнениями движения Лагранжа первого рода.*

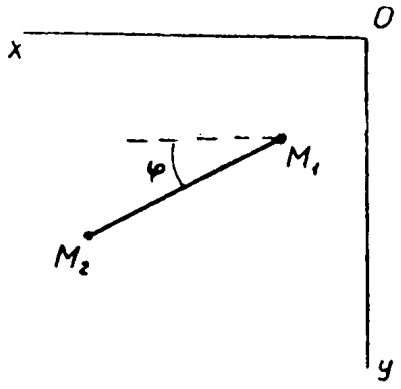
Присоединяя к уравнениям (4) уравнения связей (1), получаем полную систему $N+\kappa$ уравнений, служащую для определения такого же числа функций времени x_ν, λ_j.

Применяя те же рассуждения, что и в динамике точки и аналитической статике, убеждаемся, что входящие в уравнения (4) суммы представляют собой проекции равнодействующей реакций связей на оси координат, а каждый член суммы есть проекция на данную ось реакции соответствующей связи. Таким образом, реакция связи $f_j = 0$, действующая на точку с номером i, есть

$$\boldsymbol{R}_{ij} = \lambda_j \operatorname{grad}_i f_j.$$

Поэтому знание множителей λ_j позволяет определить реакции всех связей.

Пример. Определить движение системы двух тяжелых материальных точек, соединенных идеальным нерастяжимым стержнем (фиг. 150), считая начальные скорости точек лежащими в одной вертикальной плоскости.



Фиг. 150

При сделанном предположении относительно начальных скоростей, обе точки системы будут двигаться в вертикальной плоскости. Примем эту плоскость за плоскость (xy), направляя ось y вертикально вниз. Координаты и массу точки M_1 обозначим через x_1, y_1, m_1, точки M_2 — через x_2, y_2, m_2.

Если l — длина стержня, то движение системы будет подчинено одному уравнению связи

$$f \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2 = 0, \qquad \text{(a)}$$

выражающему неизменность длины стержня.

Так как активными силами являются силы тяжести, то уравнения Лагранжа (4′) примут вид:

$$m_i \ddot{x}_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad m_i \ddot{y}_i = m_i g + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2),$$

что на основании (a) дает

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -2\lambda (x_2 - x_1), \\ m_1 \ddot{y}_1 &= m_1 g - 2\lambda (y_2 - y_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= 2\lambda (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{y}_2 &= m_2 g + 2\lambda (y_2 - y_1). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Система, в силу уравнения (a), имеет три степени свободы. Поэтому для решения задачи нам достаточно найти три интеграла уравнений (b), связывающие координаты со временем и шестью произвольными постоянными и не содержащими множителя λ.

Складывая первое уравнение (b) с третьим и второе с четвертым, имеем:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2) g.$$

Интегрируя эти уравнения, находим два интеграла

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = C_1 t + C_2, \tag{c}$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g t^2 + C_3 t + C_4, \tag{d}$$

где C_i — произвольные постоянные.

Для получения третьего интеграла поделим сначала первые два уравнения (b) на m_1, вторые два — на m_2, а затем вычтем из третьего уравнения первое и из четвертого второе. Тогда получим:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = 2\lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (x_2 - x_1);$$

$$\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 = 2\lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (y_2 - y_1).$$

Отсюда, сравнивая правые части и вычитая из второго уравнения первое, найдем

$$(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)(x_2 - x_1) - (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Первый интеграл этого уравнения будет:

$$(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)(x_2 - x_1) - (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(y_2 - y_1) = C_5.$$

Деля это равенство почленно на

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2,$$

получаем:

$$\frac{(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)(x_2 - x_1) - (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{C_5}{l^2},$$

что еще можно переписать в виде

$$\frac{\dfrac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{x_2 - x_1} - (y_2 - y_1) \dfrac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{(x_2 - x_1)^2}}{1 + \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \frac{C_5}{l^2}.$$

Замечая, что в числителе стоит производная дроби

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

получаем после интегрирования

$$\operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{C_5}{l^2} t + C_6$$

или

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\left(\frac{C_5}{l^2} t + C_6\right). \tag{e}$$

Интегралы (c), (d) и (e) вместе с уравнением связи (a) и решают, поставленную задачу, если для определения произвольных постоянных будет задано шесть независимых начальных условий.

Очевидно, что аргумент тангенса, входящего в (e), равен углу φ (фиг. 150), образуемому стержнем M_1M_2 с осью x.

2. Общее уравнение механики в независимых координатах. Общее уравнение механики (2) можно записать в виде

$$\delta A_F + \delta A_I = 0, \tag{a}$$

где

$$\delta A_F = \sum X_\nu \delta x_\nu$$

есть виртуальная работа активных сил, а

$$\delta A_I = -\sum m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu$$

— виртуальная работа сил инерции.

Перейдем в уравнении (a) к независимым обобщенным координатам q_r ($r = 1, 2, \ldots, s$), число которых есть $s = N - k$, где k — число уравнений голономных связей. Тогда декартовы координаты окажутся функциями от независимых

$$x_\nu = x_\nu(q, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{b}$$

где, как мы установили ранее, явная зависимость от t будет иметь место только при реономных связях.

В аналитической статике мы видели, что при переходе к независимым координатам элементарная работа активных сил на виртуальном перемещении системы выражается формулой (30—15)

$$\delta A_F = \sum_{r=1}^{s} Q_r \delta q_r, \tag{c}$$

где Q_r — обобщенные силы, отвечающие соответствующим координатам. Эти силы определяются формулой (30—13)

$$Q_r = \sum X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}, \tag{5}$$

а в частном случае сил, имеющих потенциал — формулой (30—18)

$$Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r}. \tag{5'}$$

Таким образом, нам остается еще выразить в независимых координатах работу δA_I.

Из выражений (b) имеем

$$\delta x_\nu = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} \delta q_r \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя эти выражения в δA_I и меняя порядок суммирования, находим

$$\delta A_I = -\sum_{r=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\delta q_r. \tag{d}$$

Можем далее записать

$$\ddot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\right) - \dot{x}_\nu \frac{d}{dt}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}. \tag{e}$$

Дифференцируя зависимости (b) по времени, имеем

$$\dot{x}_\nu = \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\rho}\dot{q}_\rho + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{6}$$

Как видим, проекции скоростей точек системы на оси декартовых координат являются линейными функциями от обобщенных скоростей $\dot{q}_\rho$ с коэффициентами, зависящими только от координат q_ρ и, возможно, времени t.

Составляя от каждого из выражений (6) производную по какой-либо координате q_r, получаем

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_r} = \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_r \partial q_\rho}\dot{q}_\rho + \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_r \partial t}.$$

С другой стороны имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_\rho \partial q_r}\dot{q}_\rho + \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial t \partial q_r}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, видим, что правые части этих двух выражений равны друг другу, откуда следует

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_r}. \tag{7}$$

Дифференцируя далее (6) по $\dot{q}_r$, получим в правой части только коэффициент при обобщенной скорости с индексом $\rho = r$, то есть будем иметь

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_r}. \tag{8}$$

Делая в (e) замену с помощью формул (7) и (8), находим

$$\ddot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_r}.$$

Подставляя это выражение в (d) и вынося дифференцирование по t за знак суммы, имеем:

$$\delta A_I = -\sum_{r=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_r} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_r}\right\}\delta q_r =$$

$$= -\sum_{r=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\sum \frac{m_\nu}{2}\dot{x}_\nu^2 - \frac{\partial}{\partial q_r}\sum \frac{m_\nu}{2}\dot{x}_\nu^2\right\}\delta q_r.$$

Но

$$\sum \frac{m_\nu}{2}\dot{x}_\nu^2 = T$$

есть кинетическая энергия системы. Поэтому окончательно выражение для виртуальной работы сил инерции можно записать в виде

$$\delta A_I = -\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r}\right)\delta q_r.$$

Подставляя это выражение, а также выражение (c) в (a) и меняя знак, приходим к уравнению

$$\sum_{r=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - Q_r\right\}\delta q_r = 0, \qquad (9)$$

которое и является общим уравнением механики в независимых координатах.

3. Уравнения движения системы в независимых координатах. При голономных связях вариации независимых координат не связаны никакими условиями и поэтому сами независимы между собой, то есть совершенно произвольны. В таком случае равенство (9) может иметь место только в том случае, если коэффициенты при независимых вариациях равны нулю. Тем самым приходим к уравнениям движения системы в независимых координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (10)$$

Эти уравнения часто называются еще *уравнениями движения Лагранжа второго рода.*

Мы видели, что при пользовании уравнениями Лагранжа первого рода число уравнений, образующих полную систему, равно $N + k$. Число же уравнений второго рода есть $s = N - k$. Следовательно, с ростом k, то есть с ростом числа уравнений связей, число уравнений задачи в первом случае растет, а во втором — убывает. В то же время увеличение числа связей сопровождается уменьшением числа степеней свободы, так что движение системы становится

более простым. Таким образом, оказывается, что с упрощением движения математический аппарат задачи в первом случае усложняется, а во втором упрощается. Поэтому, если требуется найти только движение системы, не определяя реакций связей, всегда предпочитают пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, в которые реакции не входят. По этой причине уравнения Лагранжа второго рода получили широкое применение как в самой механике, так и во многих смежных дисциплинах (небесной механике, теоретической физике, теории гироскопов и т. д.).

Если же в данной задаче требуется определить и реакции связей, то приходится обращаться к уравнениям Лагранжа первого рода.

Рассмотрим еще частный случай сил, имеющих потенциал. В этом случае, согласно (5′), уравнения (10) переходят в уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Так как U зависит только от координат q_r и не зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_r$, то

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} = 0.$$

Поэтому предыдущие уравнения можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_r} = 0.$$

Вводя обозначение

$$L = T + U = T - V, \tag{11}$$

где V — потенциальная энергия активных сил, приходим к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{12}$$

Такой вид принимают уравнения Лагранжа второго рода в данном случае.

Функция L называется *функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом.*

Пример. Для сравнения рассмотрим данным методом тот же пример о движении двух тяжелых точек, соединенных нерастяжимым стержнем (фиг. 150).

Так как система имеет три степени свободы, то в качестве независимых координат нужно выбрать три каких-то параметра. Возьмем за них координаты $x = x_1$, $y = y_1$ точки M_1 и угол φ, образуемый стержнем

M_1M_2 с осью x. Тогда декартовы координаты системы в функции от независимых будут

$$x_1 = x,\ y_1 = y,\ x_2 = x + l\cos\varphi,\ y_2 = y + l\sin\varphi,$$

где l — длина стержня.

Выразим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2}\left\{ m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \right\}$$

в независимых координатах. Для этого составим производные

$$\dot{x}_1 = \dot{x},\ \dot{y}_1 = \dot{y},\ \dot{x}_2 = \dot{x} - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},\ \dot{y}_2 = \dot{y} + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}.$$

Подставляя эти выражения в T, имеем

$$T = \frac{1}{2}\left\{ (m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2m_2 l(\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi)\dot{\varphi} + m_2 l^2\dot{\varphi}^2 \right\}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l(\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi + l\dot{\varphi}).$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l(\dot{y}\sin\varphi + \dot{x}\cos\varphi)\dot{\varphi}.$$

Силы тяжести имеют потенциал

$$U = (m_1 y_1 + m_2 y_2) g$$

или в независимых координатах

$$U = \{(m_1 + m_2) y + m_2 l\sin\varphi\}\, g.$$

Поэтому для обобщенных сил получим

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0,\quad Q_y = \frac{\partial U}{\partial y} = (m_1 + m_2) g,\quad Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = m_2 g l\cos\varphi.$$

Следовательно, уравнения Лагранжа (10), после сокращения третьего уравнения на $m_2 l$, будут

$$\frac{d}{dt}\{(m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\} = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d}{dt}\{(m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\} = (m_1 + m_2) g; \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{d}{dt}\{\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi + l\dot{\varphi}\} + (\dot{y}\sin\varphi + \dot{x}\cos\varphi)\dot{\varphi} = g\cos\varphi. \qquad \text{(c)}$$

Интегрирование уравнений (a) и (b) дает

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\cos\varphi = C_1 t + C_2; \qquad \text{(d)}$$

$$(m_1 + m_2) y + m_2 l\sin\varphi = \frac{m_1 + m_2}{2} g t^2 + C_3 t + C_4. \qquad \text{(e)}$$

Выполняя дифференцирование в первом члене уравнения (c) и приводя подобные, получаем

$$\ddot{y}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi + l\ddot{\varphi} = g\cos\varphi. \qquad (f)$$

Выполняя же дифференцирование в уравнениях (a) и (b), находим из них

$$\ddot{x} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}(\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}),$$

$$\ddot{y} = g + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}(\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}).$$

Подставляя эти выражения в (f), имеем после сокращений

$$\left(-\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} + l\right)\ddot{\varphi} = 0,$$

то есть

$$\ddot{\varphi} = 0,$$

откуда

$$\varphi = C_5 t + C_6. \qquad (g)$$

С учетом формул преобразования координат видим, что интегралы (d), (e) и (g) совпадают с интегралами уравнений Лагранжа первого рода.

4. Выражение кинетической энергии системы в независимых координатах. При решении задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода выражение кинетической энергии в независимых координатах проще всего получается по формулам преобразования координат, как это было сделано в предыдущем примере. Однако для теоретических целей важно иметь это выражение в общей форме.

Возьмем выражение кинетической энергии в декартовых координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\nu \dot{x}_\nu^2$$

и заменим в нем скорости $\dot{x}_\nu$ по формулам (6). Получим:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left\{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\right)^2 \dot{q}_r^2 + 2\sum_{r,\rho=1}^{s\prime}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\dot{q}_r + \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2\right\},$$

где штрих у двойной суммы указывает на ту особенность, что $r \neq \rho$ и перестановки индексов недопустимы.

Изменим порядок суммирования и введем обозначения:

$$A_{r\rho} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\rho}, \qquad A_r = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}, \qquad (13)$$

$$A = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2. \qquad (13)$$

Тогда, объединяя еще две первые суммы в фигурных скобках, получим следующее общее выражение кинетической энергии в независимых координатах:

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{r,\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho + 2\sum_{r=1}^{s} A_r\dot{q}_r + A\right). \qquad (14)$$

Здесь в двойной сумме имеют место как перестановка индексов, так и их равенство, причем $A_{r\rho} = A_{\rho r}$. Все коэффициенты при обобщенных скоростях могут зависеть только от самих координат q_r и, может быть, времени t.

Иначе можем записать, что

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \qquad (14')$$

где T_2, T_1, T_0 — однородные функции относительно обобщенных скоростей второй, первой и нулевой степени соответственно.

Если система склерономна, то декартовы координаты зависят только от независимых и не зависят явно от t. Поэтому

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial t} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

и из (13) находим

$$A_r = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \qquad A = 0.$$

Следовательно, $T_1 = T_0 = 0$, и кинетическая энергия принимает вид

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho, \qquad (15)$$

являясь однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей. Из физического смысла кинетической энергии следует, что эта функция будет *определенной положительной* квадратичной формой, обращающейся в нуль только при равенстве нулю всех обобщенных скоростей.

Известно, что если знакоопределенную квадратичную форму преобразовать к ее главным осям, то она окажется однородной квадратичной функцией, содержащей только квадраты переменных. Проделав такое преобразование, мы приведем выражение (15) к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{s} A_{rr}\dot{q}_r^2. \qquad (16)$$

Координаты q_r, в которых кинетическая энергия выражается формулой (16), называются ортогональными. Как видим, в этих координатах все $A_{r\rho} = 0$ при $r \neq \rho$.

5. Циклические координаты и метод Рауса. Если какая-либо независимая координата явно не входит в выражение функции Лагранжа L, а входит в нее только своей производной, то такая координата называется циклической.

Не нарушая общности рассуждений, можем циклическими считать первые m координат. Тогда

$$L = L(q_{m+1}, \ldots, q_s;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_s;\ t),$$

и уравнения Лагранжа (12), отвечающие циклическим координатам, принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Интегрирование этих уравнений дает m первых интегралов

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{17}$$

Раус указал метод, позволяющий с помощью этих интегралов уменьшить число дифференциальных уравнений движения второго порядка на число циклических координат. В соответствии с выражением (14) имеем

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(\sum_{r,\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho + 2\sum_{r=1}^{s} A_r\dot{q}_r + A\right) - V,$$

где коэффициенты $A_{r\rho}$, A_r будут зависеть в данном случае только от нециклических координат. Тогда уравнения (17) можно записать в виде

$$\sum_{\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_\rho + A_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Решая эту систему алгебраических уравнений относительно m производных $\dot{q}_\rho$ от циклических координат, будем иметь

$$\dot{q}_\rho = \dot{q}_\rho(q_{m+1}, \ldots, q_s;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_s;\ c_1, \ldots, c_m;\ t) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, m). \tag{a}$$

Подставляя эти значения в выражение функции L, получим

$$L(q_{m+1}, \ldots, q_s;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_s;\ t) =$$
$$= \overline{L}(q_{m+1}, \ldots, q_s;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_s;\ c_1, \ldots, c_m;\ t), \tag{b}$$

где получившаяся в результате функция $\bar{L}$ будет зависеть только от нециклических координат и их производных. Из (b) будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \frac{\partial \dot{q}_\rho}{\partial \dot{q}_r};$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \frac{\partial \dot{q}_\rho}{\partial q_r}$$

$$(r = m+1, \quad m+2, \ldots, s)$$

или согласно (17)

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\rho=1}^{m} c_\rho \frac{\partial \dot{q}_\rho}{\partial \dot{q}_r}, \qquad \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{\rho=1}^{m} c_\rho \frac{\partial \dot{q}_\rho}{\partial q_r} \qquad \text{(c)}$$

$$(r = m+1, \ m+2, \ldots, s).$$

Введем теперь функцию, называемую *функцией Рауса*,

$$R = \bar{L} - \sum_{\rho=1}^{m} c_\rho \dot{q}_\rho, \qquad (18)$$

где все $\dot{q}_\rho$ заменены их выражениями (a); эта функция не будет зависеть от циклических координат и их производных. Тогда из равенств (c) найдем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial R}{\partial q_r} \qquad (r = m+1, \ m+2, \ldots, s).$$

Отсюда следует, что отвечающие нециклическим координатам уравнения Лагранжа (12) могут быть переписаны в форме уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = m+1, \ m+2, \ldots, s), \qquad (19)$$

представляющих собой систему $s - m$ уравнений для такого же числа искомых координат $q_r (r = m+1, \ m+2, \ldots, s)$. Найдя решение системы (19) и подставляя его в равенства (17), интегрированием последних найдем и циклические координаты как функции времени.

Пример. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки массы m, движущейся под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной расстоянию от этого центра ($F = kmr$).

Будем положение точки определять полярными координатами r, φ в плоскости ее движения, беря за начало координат центр силы. Тогда кинетическая энергия точки будет

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

а потенциальная

$$V = \frac{\kappa m}{2} r^2.$$

Составляя функцию Лагранжа, имеем

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \kappa r^2). \qquad \text{(a)}$$

Видим, что φ есть циклическая координата, которой отвечает первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = c_1,$$

являющийся интегралом площадей $r^2\dot{\varphi} = c$.

Подставляя получающееся отсюда значение

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1}{mr^2} \qquad \text{(b)}$$

в (a), находим

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{c_1^2}{m^2r^2} - \kappa r^2\right).$$

Согласно (18) и выражению (b) функция Рауса будет

$$R = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{c_1^2}{m^2r^2} - \kappa r^2\right) - \frac{c_1^2}{mr^2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 - \frac{c_1^2}{m^2r^2} - \kappa r^2\right)$$

или, после подстановки $c_1 = mc$, где c — постоянная площадей,

$$R = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 - \frac{c^2}{r^2} - \kappa r^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial R}{\partial r} = m\left(\frac{c^2}{r^3} - \kappa r\right);$$

следовательно, дифференциальное уравнение для r будет

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} + \kappa r = 0.$$

Это уравнение вместе с (b) образует систему дифференциальных уравнений данного движения.

§ 37. Уравнения движения неголономных систем

1. Неголономные связи. Как мы ранее говорили, неголономными называются связи, налагающие ограничения на скорости точек системы и выражающиеся неинтегрируемыми уравнениями вида

$$f(x, \dot{x}, t) = 0.$$

Обычно эти уравнения оказываются линейными относительно скоростей. Ограничиваясь в дальнейшем только такими

связями и считая, что число уравнений неголономных связей есть l, будем брать их уравнения в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\dot{x}_\nu + a_h = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{1}$$

Коэффициенты $a_{h\nu}, a_h$ являются некоторыми функциями координат, а также и времени t в случае реономных связей.

Пусть, например, главный момент внешних сил относительно координатной оси z равен нулю. Тогда, как мы видели в теореме моментов, будет иметь место первый интеграл

$$K_z = c,$$

выражающий постоянство момента количества движения системы относительно оси z; его можно записать в виде

$$\sum m_i (x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) - c = 0.$$

Это уравнение далее не интегрируется, поэтому его можно рассматривать как уравнение неголономной связи, линейное относительно скоростей. В примере, рассмотренном в § 30, п. 4, мы тоже пришли к неголономной связи, линейной и даже однородной относительно скоростей.

Найдем условия, налагаемые неголономными связями (1) на виртуальное перемещение системы. Умножая уравнения (1) на dt, можем их переписать в виде условий, налагаемых неголономными связями на действительные элементарные перемещения точек системы

$$\sum a_{h\nu}dx_\nu + a_h dt = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{2}$$

Пусть в момент времени t какая-либо точка системы занимает некоторое совместимое со связями положение M_i. Для момента времени $t + dt$ мы будем иметь целую совокупность возможных совместимых со связями положений той же точки. Проводя такое же рассуждение, как и связанное с фиг. 119, возьмем два из этих положений M_i' и M_i''. Тогда, согласно (2), для проекций перемещений $d\boldsymbol{r}_i' = \overline{M_iM_i'}$ и $d\boldsymbol{r}_i'' = \overline{M_iM_i''}$ всех точек системы будут выполняться условия

$$\sum a_{h\nu}dx_\nu' + a_h dt = 0;$$

$$\sum a_{h\nu}dx_\nu'' + a_h dt = 0.$$

Вычитая из второго равенства первое, находим

$$\sum a_{h\nu}(dx_\nu'' - dx_\nu') = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l).$$

Так как разность $\delta\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{r}_i'' - d\boldsymbol{r}_i'$ есть элементарное перемещение точки, рассматриваемое без изменения времени и совместимое со связями, то оно является виртуальным переме-

щением. Поэтому, последние равенства можно переписать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\delta x_\nu = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l), \tag{3}$$

где δx_ν — проекции виртуальных перемещений или вариации координат точек системы. Это и будут условия, налагаемые неголономными связями на виртуальные перемещения.

Число независимых координат определяется только числом κ голономных связей и равно $s = N - \kappa$. Вариации же координат связаны не только κ условиями, налагаемыми голономными связями, но и l условиями (3). Поэтому число независимых вариаций координат, то есть число степеней свободы системы, будет равно

$$m = s - l;$$

оно меньше числа независимых координат на число уравнений неголономных связей.

2. Уравнения движения неголономной системы в декартовых координатах. Интеграл энергии. Пусть система материальных точек подчинена голономным связям с уравнениями

$$f_j(x, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots \kappa) \tag{4}$$

и неголономным с уравнениями

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\dot{x}_\nu + a_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{1}$$

Как мы знаем, эти связи налагают на вариации координат условия

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\delta x_\nu = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \kappa), \tag{5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\delta x_\nu = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{3}$$

Мы могли бы выразить отсюда зависимые вариации и подставить их в общее уравнение механики

$$\sum (X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu)\delta x_\nu = 0, \tag{6}$$

получив в этом уравнении члены только с независимыми вариациями, Однако для получения уравнений общего вида применим, как и в случае голономных систем, метод множителей Лагранжа. Умножив каждое уравнение (5) на множитель λ_j и каждое уравнение (3) на множитель μ_h, сложим

эти уравнения между собой и с уравнением (6). Тогда получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(X_\nu+\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}+\sum_{h=1}^{l}\mu_h a_{h\nu}-m_\nu\ddot{x}\right)\delta x_\nu=0.$$

Выбором множителей λ_j и μ_h обращаем в нуль коэффициенты при $\kappa+l$ зависимых вариациях; тогда обратятся в нуль и остальные коэффициенты в силу независимости оставшихся вариаций. Таким путем приходим к системе уравнений

$$m_\nu\ddot{x}_\nu=X_\nu+\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}+\sum_{h=1}^{l}\mu_h a_{h\nu}\qquad(\nu=1,2,\ldots,N).\qquad(7)$$

Эти уравнения тоже называют уравнениями Лагранжа первого рода. Как и исходное общее уравнение механики, эти уравнения справедливы, конечно, для неголономной системы, подчиненной идеальным связям.

Присоединяя к дифференциальным уравнениям (7) уравнения (4) и (1), получаем полную систему $N+\kappa+l$ уравнений, служащую для определения N координат x_ν и $\kappa+l$ множителей λ_j и μ_h. Из тех же соображений, что и ранее, каждый член сумм, входящих в уравнения (7), является проекцией реакции данной связи, действующей на соответствующую точку системы.

Пользуясь полученными уравнениями Лагранжа первого рода, установим, какой вид принимает теорема кинетической энергии для неголономной системы. С этой целью каждое из уравнений (7) умножим на dx_ν и просуммируем полученные равенства; меняя еще порядок суммирования в двойных суммах, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{x}_\nu dx_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}X_\nu dx_\nu+\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_j\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}dx_\nu+\sum_{h=1}^{l}\mu_h\sum_{\nu=1}^{N}a_{h\nu}dx_\nu.\qquad(a)$$

Далее видим, что

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{x}_\nu dx_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{x}_\nu\dot{x}_\nu dt=d\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{2}m_\nu\dot{x}_\nu^2=dT$$

есть дифференциал кинетической энергии. Первый член правой части

$$\sum_{\nu=1}^{N}X_\nu dx_\nu=d'A_F$$

является элементарной работой активных сил. Дифференцируя каждое уравнение (4) голономных связей, находим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}dx_\nu+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0,$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} dx_\nu = -\frac{\partial f_j}{\partial t} dt.$$

Наконец из уравнений неголономных связей, записанных в форме (2), имеем

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu} dx_\nu = -a_h dt.$$

Подставляя все эти значения сумм в (a), приходим к следующему выражению теоремы кинетической энергии для неголономной системы, подчиненной идеальным связям:

$$dT = d'A_F - \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} dt - \sum_{h=1}^{l} \mu_h a_h dt. \qquad \text{(b)}$$

Пусть теперь активные силы имеют потенциал U; тогда

$$d'A_F = dU.$$

Допустим также, что голономные связи склерономны, а уравнения неголономных связей однородны относительно скоростей; в таком случае

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \kappa), \qquad a_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, l).$$

При этих условиях уравнение (b) принимает вид

$$dT = dU,$$

что после интегрирования дает интеграл энергии

$$T = U + h.$$

Таким образом, интеграл энергии имеет место для неголономной системы, подчиненной идеальным связям, при условиях: 1) активные силы имеют потенциал, 2) голономные связи склерономны, 3) неголономные связи линейны и однородны относительно скоростей.

3. Уравнения движения неголономной системы в независимых координатах. Уравнения Рауса. Преобразуем уравнения неголономных связей (1) к независимым координатам. Для этого подставим в (1) известные нам выражения скоростей

$$\dot{x}_\nu = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \qquad (8)$$

Меняя еще порядок суммирования в первом члене, получим

$$\sum_{r=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\dot{q}_r + \sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t} + a_h = 0.$$

Вводя обозначения

$$A_{hr} = \sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}, \qquad A_h = \sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t} + a_h, \tag{9}$$

найдем уравнения неголономных связей в независимых координатах в виде

$$\sum_{r=1}^{s} A_{hr}\dot{q}_r + A_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{10}$$

Коэффициенты A_{hr} и A_h зависят только от независимых координат и времени.

Точно так же, подставляя в условия (3) значения вариаций декартовых координат

$$\delta x_\nu = \sum_{r=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\delta q_r,$$

получим условия, налагаемые неголономными связями на вариации независимых координат

$$\sum_{r=1}^{s} A_{hr}\delta q_r = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, l) \tag{11}$$

при тех же значениях коэффициентов A_{hr}.

Обращаясь к общему уравнению механики в независимых координатах

$$\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - Q_r\right)\delta q_r = 0, \tag{12}$$

видим, что теперь, в отличие от голономной системы, вариации не будут все независимы, ибо они связаны условиями (11). Поэтому для неголономных систем уравнения движения в независимых координатах примут иной вид и для их получения потребуются другие методы.

Раус предложил метод, аналогичный методу неопределенных множителей Лагранжа. Именно, умножим каждое условие (11) на произвольный множитель λ_h, после чего просуммируем эти условия и результат вычтем из уравнения (12). Получим

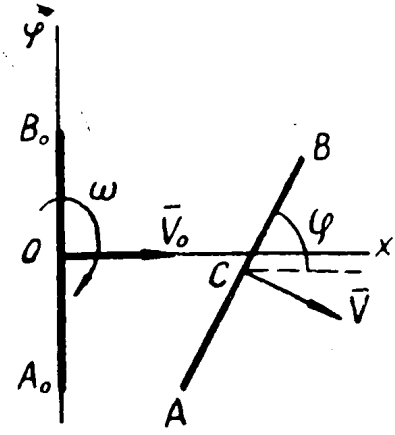
$$\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - Q_r - \sum_{h=1}^{l}\lambda_h A_{hr}\right)\delta q_r = 0.$$

Как и ранее, можем в этом уравнении приравнять нулю коэффициенты при всех вариациях: при зависимых — в силу выбора множителей λ_h, а при остальных — в силу независимости вариаций. Таким путем получаем уравнения Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \sum_{h=1}^{l} \lambda_h A_{hr} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \quad (13)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения неголономных связей (10), будем иметь полную систему $s + l$ уравнений, служащую для определения $s + l$ функций времени q_r и λ_h.

Пример. Определить движение тяжелого однородного стержня AB (фиг. 151), который движется так, что скорость его центра масс C во все время движения перпендикулярна стержню. В начальный момент эта скорость имеет величину v_0, стержень занимает вертикальное положение A_0B_0, и ему сообщена угловая скорость ω вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и вектору v_0, в направлении, указанном стрелкой.



Фиг. 151

При указанных условиях стержень будет двигаться в вертикальной плоскости, проходящей через начальное положение стержня и вектор v_0. Возьмем в этой плоскости оси x и y, направляя ось x по вектору v_0, ось y — по стержню вертикально вверх.

Положение стержня будем определять тремя независимыми параметрами—координатами центра масс x, y и углом φ стержня с осью x. Условие для скорости точки C говорит о равенстве нулю проекции скорости этой точки на направление стержня. Это приводит к уравнению неголономной связи

$$\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi = 0. \qquad (a)$$

Кинетическую энергию стержня по теореме Кёнига можно взять в виде

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2;$$

где M — масса стержня, I — его момент инерции относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его средину. Потенциальная энергия будет

$$U = -Mgy.$$

В данном случае мы имеем одно уравнение неголономной связи (а) вида

$$a_1\dot{x} + a_2\dot{y} = 0,$$

в котором $a_1 = \cos\varphi$, $a_2 = \sin\varphi$. Поэтому уравнения Рауса будут:

$$M\ddot{x} = \lambda\cos\varphi, \qquad M\ddot{y} = \lambda\sin\varphi - Mg, \qquad I\ddot{\varphi} = 0$$

или иначе

$$\ddot{x} = \alpha \cos \varphi, \qquad \ddot{y} = \alpha \sin \varphi - g, \qquad \ddot{\varphi} = 0, \tag{b}$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda}{M},$$

причем α может зависеть в общем случае от времени, координат и их первых производных.

Исключая α из первых двух уравнений (b), получаем

$$\ddot{x} \sin \varphi - \ddot{y} \cos \varphi = g \cos \varphi. \tag{c}$$

Интегрируя систему, состоящую из уравнений (a), (c) и третьего уравнения (b) и удовлетворяя начальным данным, мы и найдем решение задачи.

Мы, однако, пойдем более кратким путем, учитывая, что неголономная связь (a) однородна относительно скоростей и поэтому будет иметь место интеграл энергии

$$T = U + h,$$

принимающий здесь вид

$$\frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = - Mgy + h. \tag{d}$$

Этим уравнением заменим уравнение (c).

Согласно условиям задачи, начальные данные будут: при $t = 0$ $x = y = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi} = -\omega$. Удовлетворяющее этим данным решение третьего уравнения (b) есть

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega t, \tag{e}$$

причем во все время движения будет $\dot{\varphi} = -\omega = \text{const}$. Из начальных условий находим

$$h = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Подставляя это значение в (d) и производя сокращения, приходим к уравнению

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 - 2gy. \tag{f}$$

Уравнение связи (a) после подстановки φ из (e) принимает вид:

$$\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t = 0,$$

откуда

$$\dot{x} = -\dot{y} \operatorname{ctg} \omega t. \tag{g}$$

Подстановка этого значения в (f) приводит к уравнению только для y

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t)\, \dot{y}^2 = v_0^2 - 2gy,$$

которое после разделения переменных и извлечения корня приводится к виду

$$\frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = -\frac{dt}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t}} = -\sin \omega t dt.$$

Знак минус в правой части берется потому, что в первые моменты времени вектор v будет иметь наклон вниз и поэтому будет $\dot{y} < 0$; когда же станет $\omega t > \pi$, вектор v окажется направленным кверху, а синус изменит

знак, что автоматически даст нужную перемену знака у $\dot{y}$. Интегрируя последнее равенство, находим:

$$-\frac{1}{g}\sqrt{v_0^2-2gy}=\frac{1}{\omega}\cos\omega t+C.$$

Начальные условия дают

$$C=-\frac{v_0}{g}-\frac{1}{\omega}.$$

Подставляя значение C и возвышая в квадрат, получаем

$$v_0^2-2gy=\left[v_0+\frac{g}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]^2,$$

откуда окончательно имеем для y:

$$y=-\frac{1}{\omega}\left[v_0+\frac{g}{2\omega}(1-\cos\omega t)\right](1-\cos\omega t). \qquad \text{(h)}$$

Дифференцируя (h), имеем:

$$\dot{y}=-\left[v_0+\frac{g}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]\sin\omega t.$$

Тогда из (g) находим:

$$\dot{x}=\left[v_0+\frac{g}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]\cos\omega t.$$

Отсюда видим, что модуль скорости центра масс стержня меняется по гармоническому закону

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=v_0+\frac{g}{\omega}(1-\cos\omega t).$$

Интегрируя выражение для $\dot{x}$ и используя начальное условие для x, получаем

$$x=\frac{1}{\omega}\left[\left(v_0+\frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t-\frac{g}{2\omega}(\omega t+\sin\omega t\cos\omega t)\right]. \qquad \text{(i)}$$

Формулы (e), (h), (i) и определяют закон движения стержня.

4. Уравнения движения, получающиеся прямым исключением зависимых вариаций. Уравнения Рауса обладают тем же недостатком, что и уравнения Лагранжа первого рода: с ростом числа уравнений связей (10) число степеней свободы системы уменьшается, то есть движение становится более простым, число же уравнений при этом возрастает, так что с упрощением движения математический аппарат усложняется.

Можно, однако, составить другие уравнения движения неголономных систем, получающиеся прямым исключением зависимых вариаций. Число уравнений движения в этом методе оказывается одним и тем же при любом числе уравнений связей (10).

Условия (11)

$$\sum_{r=1}^{s}A_{hr}\,\delta q_r=0\ \ (h=1,2,\ldots,l),$$

налагаемые неголономными связями на вариации независимых координат, разрешим относительно зависимых вариаций, за которые примем вариации первых l координат. Получим

$$\delta q_r = \sum_{j=l+1}^{s} B_{rj}\,\delta q_j \quad (r = 1, 2, \ldots, l), \tag{а}$$

где коэффициенты B_{rj} будут зависеть только от координат и времени.

Ограничимся случаем сил, имеющих потенциал. Тогда общее уравнение механики можно взять в виде

$$\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r}\right)\delta q_r = 0,$$

где $L = T - V$ — функция Лагранжа. Подставляя сюда значения (а) первых вариаций, будем иметь

$$\sum_{r=l+1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r}\right)\delta q_r + \sum_{r=1}^{l}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r}\right)\sum_{j=l+1}^{s} B_{rj}\,\delta q_j = 0.$$

Меняя порядок суммирования в двойной сумме и переставляя в ней индексы суммирования, находим:

$$\sum_{r=l+1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{j=1}^{l} B_{jr}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\right\}\delta q_r = 0.$$

Отсюда, в силу независимости оставшихся вариаций, приходим к уравнениям движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{j=1}^{l} B_{jr}\left(\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{14}$$

$$(r = l+1,\ l+2, \ldots, s).$$

Коэффициенты B_{jr} зависят от всех координат q_r, а функция L, кроме того, и от их первых производных. Поэтому уравнения (14) нужно рассматривать совместно с уравнениями связей (10), что и дает полную систему s уравнений для s функций q_r. Таким образом, при любом числе неголономных связей здесь всегда будем иметь одно и то же число уравнений, равное s.

Пример. Рассмотрим тот же пример, что и в предыдущем пункте о движении тяжелого стержня при уравнении неголономной связи

$$\dot x\cos\varphi + \dot y\sin\varphi = 0.$$

Так как имеется лишь одна связь, то $l = 1$, и в уравнениях (14) сумма представится лишь одним членом, так что индекс j можно опустить.

Условия (11) для вариаций принимают в данном случае вид одного равенства

$$\cos\varphi\delta x + \sin\varphi\delta y = 0.$$

Отсюда можем выразить, например,

$$\delta x = -\operatorname{tg}\varphi\cdot\delta y.$$

Следовательно, коэффициенты B_{jr}, отвечающие координатам y и φ, здесь будут

$$B_y = -\operatorname{tg}\varphi,\ B_\varphi = 0.$$

Функция Лагранжа для рассматриваемого примера представится в виде

$$L = T + U = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - Mgy.$$

Получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial y} = -Mg.$$

Поэтому уравнения (14), отвечающие координатам y и φ, примут вид:

$$\ddot{y} + g - \operatorname{tg}\varphi\cdot\ddot{x} = 0,\quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Эти уравнения вместе с уравнением связи полностью совпадают с уравнениями (a), (c) и третьим уравнением (b), полученными в предыдущем пункте, и решение задачи можно получить указанным там путем.

5. Уравнения Чаплыгина. Чаплыгин показал, что вместо системы (14) в частном случае можно получить другую систему $m = s - l$ дифференциальных уравнений движения, не связанную с уравнениями неголономных связей (10). В истории механики это были первые правильно составленные уравнения движения неголономных систем.

Если активные силы имеют потенциал, то уравнения Чаплыгина можно получить из уравнений (14). Пусть имеются циклические координаты, число которых не меньше числа l неголономных связей. Примем l циклических координат в качестве тех первых l координат, вариации которых мы считали зависимыми в предыдущем преобразовании. Тогда для движения системы будут выполняться уравнения (14), в которых только нужно положить для первых l координат

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\ (j = 1, 2, \ldots, l),$$

то есть нужно взять эти уравнения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{j=1}^{l} B_{jr}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$(r = l+1,\ l+2, \ldots, s).$$

Чаплыгин устанавливает свои уравнения для случая склерономных неголономных связей, уравнения которых однородны относительно скоростей, то есть имеют вид:

$$\sum_{r=1}^{s} A_{hr}\dot{q}_r = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, l). \tag{b}$$

Кроме того, он предполагает, что коэффициенты A_{hr} не зависят от l первых координат. Разрешая эту систему относительно обобщенных скоростей, отвечающих этим l координатам, получим

$$\dot{q}_j = \sum_{r=l+1}^{s} B_{jr}\dot{q}_r \quad (j = 1, 2, \ldots, l), \tag{c}$$

где все B_{jr} не будут зависеть от l первых координат и будут иметь те же значения, что и в уравнениях (a).

Подставляя значения (c) в общее выражение функции Лагранжа, придем к тождеству

$$L(q_{l+1}, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l, \dot{q}_{l+1}, \ldots, \dot{q}_s; t) \equiv$$
$$\equiv \bar{L}(q_{l+1}, \ldots, q_s; \dot{q}_{l+1}, \ldots, \dot{q}_s; t).$$

Тогда, как и при выводе уравнений Рауса для голономной системы (§ 36, п. 5), будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_r}; \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r}$$
$$(r = l+1, \ l+2, \ldots, \ s).$$

Выражая отсюда производные $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$ и $\frac{\partial L}{\partial q_r}$ и подставляя их значения в уравнения (a), приходим к уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_r} - \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_r}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\frac{d\dot{q}_j}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_r} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} + \sum_{j=1}^{l} B_{jr}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{d}$$
$$(r = l+1, \ l+2, \ldots, \ s).$$

В силу (c) имеем

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_r} = B_{jr}, \quad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} = \sum_{\rho=l+1}^{s}\frac{\partial B_{j\rho}}{\partial q_r}\dot{q}_\rho,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_r} = \frac{dB_{jr}}{dt} = \sum_{\rho=l+1}^{s} \frac{\partial B_{jr}}{\partial q_\rho}\dot{q}_\rho.$$

При подстановке этих выражений в уравнения (d) видим, что второй и последний члены каждого уравнения сокращаются, и уравнения принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_r} + \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\sum_{\rho=l+1}^{s}\left(\frac{\partial B_{j\rho}}{\partial q_r} - \frac{\partial B_{jr}}{\partial q_\rho}\right)\dot{q}_\rho = 0 \qquad (r = l+1,\ l+2,\ \ldots,\ s). \qquad (15)$$

Эти уравнения и являются уравнениями Чаплыгина для рассматриваемого случая консервативных сил. Считая, что в производных $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ все $\dot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ заменены по формулам (c), видим, что эти уравнения не содержат ни l первых координат, ни их производных. Следовательно, уравнения (15) представляют собой замкнутую систему $m = s - l$ уравнений второго порядка для m функций $q_{l+1}, \ldots, q_s$. Решив эту систему, можем далее из уравнений (c) найти и остальные l координат.

Чаплыгин с успехом применил уравнения (15) к решению задачи о качении шара и всякого тела вращения по плоскости.

6. Уравнения Аппеля. Несколько позднее Чаплыгина Аппель получил другую, внешне более простую, систему уравнений движения неголономной системы. Уравнения Аппеля при некоторых условиях тоже могут образовывать замкнутую систему m уравнений. Их преимуществом перед уравнениями Чаплыгина является то, что они получены без допущений, принятых Чаплыгиным, и, кроме того, одинаково применимы к движению как неголономных, так и голономных систем.

Возьмем уравнения неголономных связей (10)

$$\sum_{r=1}^{s} A_{hr}\dot{q}_r + A_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots\ l),$$

разрешим их относительно l последних обобщенных скоростей, и полученные значения подставим в выражения (8) для скоростей в декартовых координатах. Тогда будем иметь

$$\dot{x}_\nu = \sum_{r=1}^{m} B_{\nu r}\dot{q}_r + B_\nu, \qquad (a)$$

где по-прежнему $m = s - l$ есть число степеней свободы системы, а коэффициенты $B_{\nu r}$ и B_ν зависят от координат и времени.

Точно так же, разрешая условия (11)

$$\sum_{r=1}^{s} A_{hr}\,\delta q_r = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, l)$$

относительно l последних вариаций и подставляя полученные значения в выражения для вариаций декартовых координат, найдем:

$$\delta x_\nu = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\,\delta q_r = \sum_{r=1}^{m} B_{\nu r}\,\delta q_r \qquad \text{(b)}$$

с теми же значениями коэффициентов $B_{\nu r}$, что и в (a). Теперь в выражениях (b) все вариации независимы между собой.

Дифференцируя (a) по времени, имеем:

$$\ddot{x}_\nu = \sum_{r=1}^{m} B_{\nu r}\,\ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{m} \dot{B}_{\nu r}\,\dot{q}_r + \dot{B}_\nu . \qquad \text{(c)}$$

Подставляя значения δx_ν из (b) в общее уравнение механики

$$\sum (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)\,\delta x_\nu = 0$$

и меняя порядок суммирования, получаем:

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)\,B_{\nu r}\,\delta q_r = 0. \qquad \text{(d)}$$

Согласно (c)

$$B_{\nu r} = \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_r} .$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu B_{\nu r} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_r} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_r} \sum \frac{m_\nu}{2}\,\ddot{x}_\nu^2 = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r}, \qquad \text{(e)}$$

где

$$S = \frac{1}{2} \sum m_\nu \ddot{x}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) \qquad (16)$$

можно, по аналогии с кинетической энергией, назвать *энергией ускорений.*

Обозначим также через

$$Q_r = \sum_{\nu=1}^{N} B_{\nu r} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, m). \qquad (17)$$

Величины Q_r тоже называют обобщенными силами, хотя они имеют иной смысл, чем ранее.

В силу (e) и (17) уравнение (d) перепишется в виде

$$\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r}-Q_r\right)\delta q_r=0.$$

Так как в этом равенстве все вариации координат независимы между собой, то получаем уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r}=Q_r\ (r=1,2,\ldots,m). \tag{18}$$

Эти уравнения и называются *уравнениями Аппеля.*

Перед составлением уравнений (18) мы должны функцию S и все Q_r выразить в независимых координатах, пользуясь формулами (c). Если коэффициенты $B_{\nu r}$ и B_ν не зависят от последних l координат, то S и Q_r тоже будут независимы от этих координат и их производных. В таком случае уравнения (18) будут образовывать полную систему m уравнений для функций $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Следовательно, нужно в качестве координат $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_s$ выбирать те, которые не будут входить в коэффициенты выражений (a).

Для полного определения движения системы получаемые в результате интегрирования системы (18) значения $q_1, q_2, \ldots, q_m$ подставляем в уравнения (10). Интегрируя еще эти уравнения, находим остальные координаты.

Если же указанного выбора l последних координат сделать нельзя, то уравнения (18) нужно рассматривать совместно с уравнениями (10).

Применяя уравнения (18) к голономным системам, достаточно считать $l=0$ и $m=s$. При этом вместо (a) необходимо пользоваться непосредственно исходными формулами (8), в силу чего будем иметь

$$B_{\nu r}=\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}$$

и обобщенные силы Q_r будут совпадать с ранее рассматривавшимися. Точно так же, согласно (16) и (c), будем иметь:

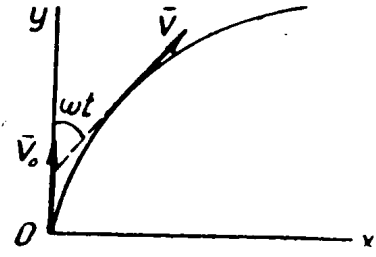
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_r}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu B_{\nu r}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}.$$

Последнее же выражение, как мы видели при получении общего уравнения механики в независимых координатах, равно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}.$$

Следовательно, для голономных систем уравнения Аппеля будут совпадать с уравнениями Лагранжа второго рода.

Пример 1. Тяжелой материальной точке сообщена начальная скорость v_0 вертикально вверх. Самонаводящее устройство заставляет точку двигаться так, что вектор ее скорости в дальнейшем равномерно поворачивается по часовой стрелке с угловой скоростью ω. Найти закон движения точки.



Фиг. 152

Выберем в вертикальной плоскости движения точки оси координат с началом в начальном положении точки, направляя ось x горизонтально, ось y — вертикально вверх (фиг. 152). Тогда угол наклона скорости, то есть касательной к траектории точки, с осью y будет равен ωt, что дает условие

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \omega t.$$

Это условие можно переписать в виде следующего уравнения неголономной связи:

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{ctg} \omega t. \tag{a}$$

За независимые координаты примем декартовы координаты x и y. Энергия ускорений будет

$$S = \frac{m}{2}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2).$$

В данном случае $s = 2$, $l = 1$, число степеней свободы будет $s - l = 1$. Поэтому будем иметь лишь одно уравнение Аппеля. Для его получения исключим $\ddot{y}$, подставляя в S его значение из (a):

$$\ddot{y} = \ddot{x} \operatorname{ctg} \omega t - \frac{\omega \dot{x}}{\sin^2 \omega t} = \ddot{x} \operatorname{ctg} \omega t - \omega \dot{x} (1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t). \tag{b}$$

Получим

$$S = \frac{m}{2}\{\ddot{x}^2 + [\ddot{x} \operatorname{ctg} \omega t - \omega \dot{x}(1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t)]^2\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{(1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t)\ddot{x}^2 - 2\omega \operatorname{ctg} \omega t (1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t)\dot{x}\ddot{x} +$$

$$+ \omega^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t)^2 \dot{x}^2\}.$$

Так как $X = 0$, $Y = -mg$, а из (b)

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \ddot{x}} = \operatorname{ctg} \omega t,$$

то для обобщенной силы имеем:

$$Q_x = X\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \ddot{x}} + Y\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \ddot{x}} = -mg \operatorname{ctg} \omega t.$$

Составляя уравнение Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}} = Q_x,$$

находим

$$(1+\operatorname{ctg}^2\omega t)\,\ddot{x}-\omega\operatorname{ctg}\omega t\,(1+\operatorname{ctg}^2\omega t)\,\dot{x}=-g\operatorname{ctg}\omega t. \qquad (c)$$

Введем новую независимую переменную

$$u=\operatorname{ctg}\omega t. \qquad (d)$$

Учитывая, что

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\omega}{\sin^2\omega t}=-\omega(1+u^2),$$

получим, обозначая штрихами производные по u,

$$\dot{x}=-\omega(1+u^2)\,x',\quad \ddot{x}=\omega(1+u^2)\,[\omega(1+u^2)\,x''+2\omega u x'].$$

В итоге уравнение (c) перейдет в уравнение

$$(1+u^2)^3x''+3u(1+u^2)^2x'=-\frac{g}{\omega^2}u, \qquad (e)$$

а уравнение (a) в уравнение связи

$$y'=ux'. \qquad (f)$$

Уравнение (e) есть линейное уравнение с правой частью. Его частный интеграл будет

$$x=-\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{u}{1+u^2}-\operatorname{arcctg}u\right).$$

Однородное уравнение, получающееся из (e) после сокращения, имеет вид:

$$(1+u^2)\,x''+3ux'=0$$

или

$$\frac{x''}{x'}=-\frac{3u}{1+u^2}.$$

Интегрируя один раз, получим:

$$x'=\frac{C_1}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Беря еще одну квадратуру, находим:

$$x=C_1\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}+C_2.$$

Таким образом, общее решение уравнения (e) будет

$$x=-\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{u}{1+u^2}-\operatorname{arcctg}u\right)+C_1\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}+C_2.$$

Составляя производную, имеем:

$$x'=\frac{g}{\omega^2}\frac{1}{(1+u^2)^2}+\frac{C_1}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Следовательно, согласно (f),

$$y'=\frac{g}{\omega^2}\frac{u}{(1+u^2)^2}+C_1\frac{u}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Интегрирование дает

$$y=-\frac{g}{2\omega^2}\frac{1}{1+u^2}-C_1\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}+C_3.$$

Возвращаясь по (d) к независимой переменной t, будем иметь:

$$x = \frac{g}{2\omega^2}(\sin\omega t\cos\omega t - \omega t) + C_1\cos\omega t + C_2;$$

$$y = -\frac{g}{2\omega^2}\sin^2\omega t - C_1\sin\omega t + C_3;$$

$$\dot{x} = -\frac{g}{\omega}\sin^2\omega t - C_1\omega\sin\omega t;$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t - C_1\omega\cos\omega t.$$

Начальные условия задачи имеют вид:

при $t=0$ $x=y=0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}=v_0$.

Отсюда получаем для произвольных постоянных значения:

$$C_1 = -\frac{v_0}{\omega}, \qquad C_2 = -C_1 = \frac{v_0}{\omega}, \quad C_3 = 0.$$

Окончательно закон движения точки принимает вид:

$$x = \frac{1}{\omega}\left[v_0(1-\cos\omega t) + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t\cos\omega t - \omega t)\right],$$

$$y = \frac{\sin\omega t}{\omega}\left(v_0 - \frac{g}{2\omega}\sin\omega t\right).$$

Для проекций скорости точки имеем:

$$\dot{x} = \sin\omega t\left(v_0 - \frac{g}{\omega}\sin\omega t\right), \qquad \dot{y} = \cos\omega t\left(v_0 - \frac{g}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Следовательно, скорость точки будет

$$v = v_0 - \frac{g}{\omega}\sin\omega t.$$

Пример 2. Покажем на примере движения однородного тяжелого стержня при условиях, рассмотренных в п. 3 и 4, как метод Аппеля можно применить к движению сплошного тела.

Координаты центра масс стержня C обозначим через x_c, y_c (фиг. 153). За независимые параметры по-прежнему возьмем x_c, y_c, φ; они будут удовлетворять уравнению неголономной связи:

$$\dot{x}_c\cos\varphi + \dot{y}_c\sin\varphi = 0. \tag{g}$$

Через x, y обозначим координаты произвольной точки стержня D. Вводя также координату ξ точки D, отсчитываемую от C к B, можем по свойству плоскопараллельного движения записать, что ускорение точки D есть

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_c + \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2, \tag{h}$$

где $\boldsymbol{w}_c$ — ускорение центра масс C; $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$ — составляющие ускорения, возникающие от вращения стержня вокруг C. При этом перпендикулярное к стержню ускорение $\boldsymbol{w}_1$ имеет скалярную величину $w_1 = \xi\ddot{\varphi}$, а $\boldsymbol{w}_2$—

величину $w_2 = \xi\dot{\varphi}^2$. Проектируя (h) на оси координат, найдем для проекций ускорения

$$\ddot{x} = \ddot{x}_c - \xi\ddot{\varphi}\sin\varphi - \xi\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_c + \xi\ddot{\varphi}\cos\varphi - \xi\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \tag{i}$$

Элемент $d\xi$ стержня, расположенный в точке D и имеющий записанные ускорения, можно рассматривать как материальную точку с массой $\mu d\xi$, где μ — линейная плотность. Его энергия ускорений будет согласно (16):

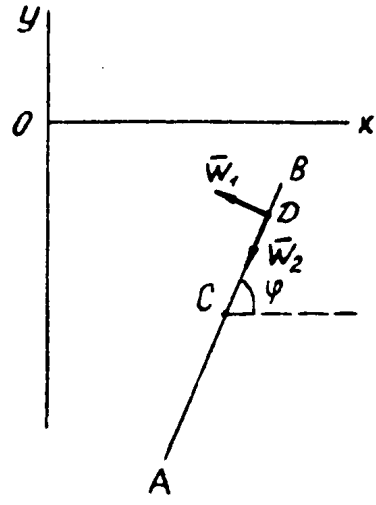
$$dS = \frac{1}{2}\mu(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)\,d\xi,$$

а для всего стержня будем иметь

$$S = \frac{1}{2}\mu\int_{-a}^{a}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)\,d\xi,$$

если $2a$ есть длина стержня. Согласно (i)

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \ddot{x}_c^2 + \ddot{y}_c^2 + \xi^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) -$$
$$- 2\xi\ddot{\varphi}(\ddot{x}_c\sin\varphi - \ddot{y}_c\cos\varphi) +$$
$$- 2\xi\dot{\varphi}^2(\ddot{x}_c\cos\varphi + \ddot{y}_c\sin\varphi).$$



Фиг. 153

Входящие сюда величины $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$, $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}$, φ как общие для всех точек стержня в данный момент, не зависят от ξ. Поэтому, подставляя полученное выражение в S и производя интегрирование, будем иметь

$$S = \frac{1}{2}\mu\left[(\ddot{x}_c^2 + \ddot{y}_c^2)\cdot 2a + \frac{2a^3}{3}(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)\right].$$

Но

$$2a\mu = M, \quad \frac{2a^3\mu}{3} = \frac{1}{3}Ma^2 = I,$$

где M — масса стержня, I — его момент инерции относительно оси C, перпендикулярной стержню. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}M(\ddot{x}_c^2 + \ddot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Прежде, чем составить уравнения Аппеля, мы должны еще исключить в S производные от такого числа независимых координат, сколько имеется уравнений неголономных связей. В данном случае мы имеем одно уравнение (g), с помощью которого можем исключить, например, $\ddot{x}_c$. Им еем из (g)

$$\dot{x}_c = -\dot{y}_c\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\ddot{x}_c = -\ddot{y}_c\operatorname{tg}\varphi - \frac{\dot{y}_c\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} = -\ddot{y}_c\operatorname{tg}\varphi - \dot{y}_c\dot{\varphi}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi). \tag{j}$$

Подставляя выражение (j) в S, находим окончательно

$$S = \frac{1}{2} M [(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(\ddot{y}_c^2 + 2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \ddot{y}_c \dot{y}_c \dot{\varphi}) + (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 \dot{y}_c^2 \dot{\varphi}^2] +$$

$$+ \frac{1}{2} I (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4). \qquad (к)$$

Для составления обобщенных сил, отвечающих координатам y_c и φ, заметим, что на каждый элемент $d\xi$ стержня действует лишь сила тяжести с единственной проекцией на ось y, равной $-\mu g d\xi$. Поэтому согласно (17) и выражений (i) будем иметь для элементарных обобщенных сил:

$$dQ_{y_c} = -\mu g d\xi \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \ddot{y}_c} = -\mu g d\xi;$$

$$dQ_{\varphi} = -\mu g d\xi \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \ddot{\varphi}} = -\mu g d\xi \cdot \xi \cos \varphi.$$

Отсюда следует:

$$Q_{y_c} = -\mu g \int_{-a}^{a} d\xi = -2\mu a g = -Mg;$$

$$Q_{\varphi} = -\mu g \cos \varphi \int_{-a}^{a} \xi \, d\xi = 0.$$

Тогда уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{y}_c} = Q_{y_c}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = Q_{\varphi}$$

согласно (k) принимают вид:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(\ddot{y}_c + \operatorname{tg} \varphi \cdot \dot{y}_c \dot{\varphi}) = -g, \quad I \ddot{\varphi} = 0. \qquad (l)$$

Последнее уравнение снова дает

$$\dot{\varphi} = -\omega = \text{const}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega t.$$

Нетрудно видеть, что первое уравнение (l) тоже совпадает с ранее полученным уравнением в п. 4:

$$\ddot{y}_c + g - \operatorname{tg} \varphi \cdot \ddot{x}_c = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно заменить $\ddot{x}_c$ его выражением (j). Подставляя далее значения φ и $\dot{\varphi}$ в первое уравнение (l) и интегрируя его или же пользуясь интегралом энергии и уравнением связи (g), можем получить то же решение, что и в п. 3.

Глава III

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 38. Моменты инерции

1. Моменты второго порядка и их простейшие свойства. Для движения всякой системы материальных точек большое значение имеет распределение масс в системе. В частности, это важно для неизменяемой системы, поэтому изучение динамики абсолютно твердого тела мы начнем с изучения величин, характеризующих указанное распределение.

Такими величинами являются так называемые *моменты*, под которыми понимаются однородные функции координат вида

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{\alpha} y_i^{\beta} z_i^{\gamma},$$

рассматриваемые для неизменяемой системы в произвольных осях, связанных с этой системой, а для изменяемой — в произвольных осях для данного момента времени. Отсюда следует, что понятие момента не связано с движением системы и носит чисто геометрический характер. Поэтому отдел механики, занимающийся теорией моментов, называют геометрией масс.

Показатель однородности рассматриваемых сумм $n=\alpha+\beta+\gamma$ называется степенью или порядком момента.

Ранее в теории центра масс системы мы уже имели дело с моментами первого порядка $\sum m_i x_i$, $\sum m_i y_i$, $\sum m_i z_i$, называемыми статическими моментами системы относительно соответствующих координатных плоскостей.

Теперь мы будем иметь дело с моментами второго порядка. Для механики основное значение имеют моменты вида:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); & D &= \sum m_i y_i z_i; \\ B' &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2); & E &= \sum m_i z_i x_i; \\ C' &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2); & F &= \sum m_i x_i y_i; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

рассматриваются также моменты

$$\left.\begin{aligned} I_x = \sum m_i x_i^2,\ \ I_y = \sum m_i y_i^2,\ \ I_z = \sum m_i z_i^2, \\ H = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i r_i^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Выражения в скобках, входящие в моменты A', B', C', равны квадратам расстояний точек системы от осей x, y, z соответственно. Поэтому A' есть момент инерции системы относительно оси x, B' — относительно оси y, C' — относительно оси z. Так как моменты I_x, I_y и I_z равны суммам произведений масс точек системы на квадраты их расстояний от соответствующих координатных плоскостей, то они называются *моментами инерции системы относительно этих плоскостей*. По той же причине момент H называется *моментом инерции системы относительно точки (начала координат), или полярным моментом инерции*. Наконец, моменты D, E и F называются *произведениями инерции* или *центробежными моментами инерции*, отвечающими данной системе координат.

Укажем на некоторые простейшие свойства моментов второго порядка.

a. Непосредственно из формул (1), (2) получаем соотношения:

$$A' = I_y + I_z,\ \ B' = I_z + I_x,\ \ C' = I_x + I_y,$$
$$H = I_x + I_y + I_z,\ 2H = A' + B' + C'.$$

Так как оси координат при данном начале можно выбрать произвольно, то последнее из записанных равенств говорит о следующем свойстве:

Сумма моментов инерции системы относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке, не зависит от выбора направления этих осей.

b. Из формул (1) для A', B', C' следует:

$$(A' + B') - C' = 2\sum m_i z_i^2 > 0,$$
$$(A' - B') - C' = -2\sum m_i x_i^2 < 0.$$

Следовательно, моменты инерции относительно координатных осей обладают свойством, аналогичным свойству сторон треугольника:

Момент инерции системы относительно какой-либо координатной оси меньше суммы моментов инерции относительно двух других осей и больше их разности.

c. Составляя выражение

$$A' - 2D = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2 - 2y_i z_i) = \sum m_i (y_i - z_i)^2,$$

видим, что $A' - 2D \geqslant 0$. Отсюда

$$D \leqslant \frac{1}{2} A'.$$

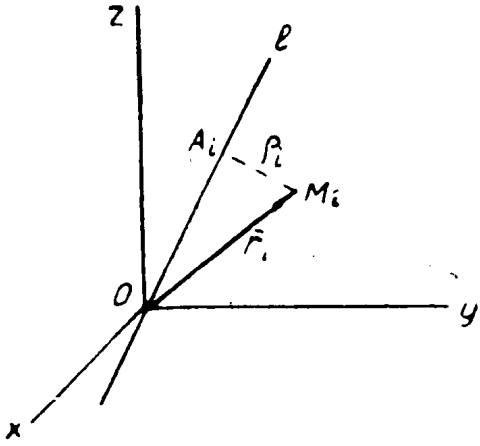
Аналогично найдем:

$$E \leqslant \frac{1}{2} B', \quad F \leqslant \frac{1}{2} C'.$$

Эти неравенства ограничивают возможные значения центробежных моментов инерции.

2. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну точку. Для моментов инерции относительно всех прямых связки, то есть всевозможных прямых, проходящих через данную точку O, можно установить формулу, характеризующую изменение этих моментов при переходе от одной оси к другой. С этой целью возьмем систему декартовых координат с началом в точке O (фиг. 154). Пусть α, β, γ будут направляющие косинусы произвольной оси l, проходящей через O.

Определяя положение какой-либо точки системы M_i радиусом-вектором r_i, опустим из нее перпендикуляр $\rho_i = M_i A_i$



Фиг. 154

на ось l. Если l^0 — единичный вектор оси l, то α, β, γ будут проекциями l^0 на оси координат. Из треугольника OM_iA_i имеем:

$$\rho_i = r_i \sin(r_i, l^0) = |r_i \times l^0|.$$

Так как

$$r_i \times l^0 = \begin{vmatrix} i & j & \kappa \\ x_i & y_i & z_i \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

где i, j, κ — орты координатных осей, то, определяя отсюда проекции векторного произведения и выражая через них ρ_i^2, находим:

$$\rho_i^2 = (y_i\gamma - z_i\beta)^2 + (z_i\alpha - x_i\gamma)^2 + (x_i\beta - y_i\alpha)^2.$$

Раскрывая скобки и приводя члены, подобные относительно косинусов, будем иметь:

$$\rho_i^2 = \alpha^2(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2(z_i^2 + x_i^2) + \gamma^2(x_i^2 + y_i^2) + \\ - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i.$$

Подставляя это значение в общую формулу момента инерции системы относительно оси l

$$I = \sum m_i \rho_i^2,$$

получаем:

$$I = \alpha^2 \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) + \gamma^2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + \\ - 2\beta\gamma \sum m_i y_i z_i - 2\gamma\alpha \sum m_i z_i x_i - 2\alpha\beta \sum m_i x_i y_i.$$

Согласно (1) этот результат можно записать в виде

$$I = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \qquad (3)$$

Меняя α, β, γ, мы можем по этой формуле найти моменты инерции относительно всех осей, проходящих через точку O. Таким образом, оказалось, что бесконечная совокупность моментов инерции относительно всех осей связки определяется с помощью только шести величин A', B', C', D, E, F.

3. Понятие тензора. В механике, теоретической физике и родственных им научных областях приходится иметь дело с величинами, совокупность которых носит название *тензора*. Существуют тензоры различных рангов, из которых основное значение имеет тензор второго ранга, который мы и будем рассматривать далее.

Имеются различные определения понятия тензора. Так, тензор второго ранга можно определить как линейную операцию, прилагаемую к проекциям некоторого вектора. Будем проекции векторов на оси прямоугольной системы координат обозначать цифровыми индексами 1, 2, 3. Можно дать такое определение:

Если вектор $\boldsymbol{B}(B_1, B_2, B_3)$ *получается из вектора* $\boldsymbol{A}(A_1, A_2, A_3)$ *по формулам линейного преобразования*

$$B_i = \sum_{\kappa=1}^{3} a_{i\kappa} A_\kappa \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (4)$$

то совокупность коэффициентов преобразования $a_{i\kappa}$ *образует тензор второго ранга.*

Обозначая тензор буквой T, будем записывать его таблицей или матрицей

$$T = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Величины a_{ik} называются *компонентами* тензора. Как видим, компоненты тензора, стоящие в какой-либо строке таблицы (5), являются коэффициентами соответствующей формулы преобразования (4).

Иногда применяют еще более краткую запись в виде

$$T = \|a_{ik}\|.$$

Сами формулы (4) кратко записывают в виде

$$B = TA;$$

при этом говорят, что вектор B есть тензор от вектора A, имея в виду, что тензор задан определенной таблицей (5).

Перейдем теперь от координатной системы $Ox_1x_2x_3$, в которой определены компоненты a_{ik} тензора T, к системе осей $Ox'_1x'_2x'_3$, полученной из первой простым поворотом вокруг начала координат. Пусть направляющие косинусы новых осей со старыми даются таблицей:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Тогда другим определением тензора будет:

Если величины a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ *преобразуются в новых осях координат в величины* b_{hj}, *определяемые квадратичными формулами относительно направляющих косинусов вида*

$$b_{hj} = \sum_{i,k=1}^{3} \alpha_{hi}\alpha_{jk}a_{ik} \quad (h, j = 1, 2, 3), \tag{6}$$

то совокупность величин a_{ik} *образует тензор второго ранга.*

Рассматриваемый тензор называется тензором *второго* ранга как раз в силу того, что формулы (6) — второй степени относительно направляющих косинусов. С этой точки зрения вектор, проекции которого, как известно, преобразуются к новым осям по линейным формулам относительно косинусов, может быть назван тензором первого ранга, а всякая скалярная величина — тензором нулевого ранга.

Данные два определения тензора, конечно, связаны между собой: приняв одно из них, можно получить другое как следствие.

Новые оси координат мы можем выбрать как угодно и по формулам (6) получить значения компонент тензора в новых осях. С физической точки зрения тензором второго ранга является совокупность девяти величин определенной физической природы, связанная с выбранной системой координат, построенной при данной точке, и принимающая другую систему значений при повороте осей координат.

В общем случае, согласно (5), тензор второго ранга имеет девять независимых компонент. Если же $a_{ik} = a_{ki}$, то есть если компоненты, симметричные относительно главной диагонали таблицы тензора, равны друг другу, то независимых компонент будет только шесть. Такой тензор называется *симметричным.*

4. Тензор инерции и эллипсоид инерции. Легко убедиться, что совокупность моментов инерции A', B', C' и произведений инерции D, E, F образует симметричный тензор второго ранга с таблицей:

$$T(I) = \begin{Vmatrix} A', & -F, & -E \\ -F, & B', & -D \\ -E, & -D, & C' \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

Этот тензор будем называть *тензором инерции.*

Чтобы это показать, запишем сначала подробно выражение компоненты тензора b_{11} согласно (6):

$$b_{11} = a_{11}\alpha_{11}^2 + a_{22}\alpha_{12}^2 + a_{33}\alpha_{13}^2 + (a_{23} + a_{32})\alpha_{12}\alpha_{13} +$$

$$+ (a_{31} + a_{13})\alpha_{13}\alpha_{11} + (a_{12} + a_{21})\alpha_{11}\alpha_{12}.$$

Полагая в этом выражении

$$\alpha_{11} = \alpha, \quad \alpha_{12} = \beta, \quad \alpha_{13} = \gamma$$

и, согласно (7),

$$a_{11} = A', \quad a_{22} = B', \quad a_{33} = C'$$

$$a_{23} = a_{32} = -D, \quad a_{31} = a_{13} = -E, \quad a_{12} = a_{21} = -F,$$

придем как раз к формуле (3) для момента инерции системы относительно оси l, совпадающей в данном случае с осью x_1'.

Точно так же найдем, что компоненты b_{22}, b_{33} явятся моментами инерции системы относительно осей x_2' и x_3' соответственно.

Для доказательства того, что в новых осях вся таблица тензора инерции тоже имеет вид (7) остается показать, что компоненты b_{hj} с разными индексами имеют тот же смысл, что и в табл. (7). Для этого можно применить об-

ратное рассуждение. Именно, в новых осях будем иметь для центробежного момента инерции

$$-D' = -\sum_{i=1}^{n} m_i x'_{2i} x'_{3i}.$$

Выражая здесь новые координаты через старые с помощью формул преобразования

$$x'_{\kappa i} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{\kappa j} x_{ji} \quad (\kappa = 2, 3),$$

приводя подобные и используя условие ортогональности осей x'_2 и x'_3, найдем, что $-D'$ совпадает с компонентой $b_{23} = b_{32}$. Аналогично убедимся, что $-E'$ совпадает с $b_{31} = b_{13}$ и $-F'$ — с $b_{12} = b_{21}$.

Если геометрическим образом приложенного вектора является направленный отрезок с определенной точкой приложения, то симметричный тензор второго ранга имеет другое геометрическое представление в виде некоторой центральной поверхности второго порядка с центром в начале координат O. Получим эту поверхность для тензора инерции (аналогичное построение делается и для всякого другого симметричного тензора второго ранга). С этой целью отложим от точки O по всем направлениям отрезки, длина которых r определяется формулой

$$r = \frac{\kappa}{\sqrt{I}}, \tag{8}$$

где I — момент инерции системы относительно той оси l, по которой откладывается отрезок r, а κ — произвольное положительное число, определяющее масштаб построения. Так как момент инерции системы при непрерывном изменении осей будет меняться непрерывным образом, то концы отрезков r опишут некоторое геометрическое место, которое и является тензорной поверхностью.

Перепишем равенство (8) в виде

$$Ir^2 = \kappa^2$$

и подставим сюда значение I по формуле (3). Учитывая, что направляющие косинусы α, β, γ оси l являются в то же время и направляющими косинусами отрезка r, будем иметь

$$r\alpha = x, \quad r\beta = y, \quad r\gamma = z,$$

где x, y, z — координаты точек поверхности. Таким путем, принимая $\kappa = 1$, получим уравнение тензорной поверхности в виде

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1. \tag{9}$$

Так как момент инерции относительно любой оси не может равняться нулю, то A', B', C' все отличны от нуля, и это уравнение есть уравнение центральной поверхности второго порядка, отнесенное к центру (нет членов с первыми степенями координат).

По той же причине согласно (8) ни для одного направления r не обращается в бесконечность. Следовательно, поверхность (9) не имеет бесконечно удаленных точек и поэтому она является эллипсоидом, называемым *эллипсоидом инерции*.

Построив эллипсоид инерции и измерив длину радиуса-вектора какой-нибудь точки эллипсоида, мы по формуле

$$I = \frac{1}{r^2},$$

полученной из (8), найдем момент инерции системы относительно той оси, на которой лежит данный радиус-вектор.

При переходе ко всякому другому началу координат мы получим новые значения компонент тензора инерции и новый эллипсоид инерции, построенный при этом начале. Таким образом мы получим тензорное поле инерции, в каждой точке которого будет существовать свой эллипсоид инерции.

5. Главные оси и главные моменты инерции. Если уравнение эллипсоида инерции (9) преобразовать к главным осям эллипсоида, то оно принимает вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \qquad (10)$$

Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* для данной точки (центра эллипсоида), а моменты инерции A, B, C относительно этих осей — *главными моментами инерции* для точки O. Очевидно, что полуоси эллипсоида выражаются через главные моменты инерции равенствами

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}},\quad b = \frac{1}{\sqrt{B}},\quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Отсутствие в уравнении (10) членов с произведениями координат говорит о том, что для главных осей инерции все центробежные моменты инерции D, E и F равны нулю.

Главные направления, то есть направления главных осей инерции отличаются от всех других направлений, проходящих через данную точку, тем, что для них радиус-вектор r точек поверхности эллипсоида инерции принимает стационарное значение. Поэтому момент инерции I, определяемый формулой

$$I = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta, \qquad (3)$$

будет тоже, согласно (8), принимать для этих направлений стационарное значение. Таким образом, задача об определении направляющих косинусов α, β, γ главных направлений сводится к задаче на условный экстремум функции (3), когда переменные оказываются связанными условием

$$\varphi \equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0. \qquad (a)$$

Применяя метод Лагранжа, мы должны для решения задачи приравнять нулю частные производные от функции $I - \lambda\varphi$, где λ — пока произвольный множитель. Получим:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \beta} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \gamma} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = 0, \qquad (b)$$

что после подстановки значений производных приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (A' - \lambda)\alpha - F\beta - E\gamma = 0, \\ -F\alpha + (B' - \lambda)\beta - D\gamma = 0, \\ -E\alpha - D\beta + (C' - \lambda)\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Так как эта система должна иметь решение, в котором хотя бы одна из искомых величин отлична от нуля, то определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A' - \lambda, & -F, & -E \\ -F, & B' - \lambda, & -D \\ -E, & -D, & C' - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (c)$$

Получили характеристическое уравнение, служащее для определения λ. Уравнение (c) будет третьей степени относительно λ и, следовательно, будет иметь три корня λ_1, λ_2, λ_3. Как известно из аналитической геометрии, все эти корни будут вещественными. Для каждого из них найдем из уравнений (11) отношения двух косинусов к третьему, а затем с помощью (a) определим и сами направляющие косинусы. Тем самым задача об определении главных направлений будет решена.

Установим еще смысл корней уравнения (c). Для этого умножим первое уравнение (b) на α, второе на β, третье на γ и сложим. В результате, в силу уравнения (a), придем к равенству

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial I}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\gamma - 2\lambda = 0.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях сумма первых трех слагаемых равна $2I$. Отсюда находим $\lambda = I$;

а так как уравнения (b) справедливы только для главных направлений, то это говорит о том, что корни характеристического уравнения (c) как раз равны главным моментам инерции системы.

Заметим, что если раскрыть определитель в уравнении (c), то коэффициенты при различных степенях λ могут быть выражены через корни этого уравнения, которые не зависят от выбора осей координат при точке O. Тем самым устанавливается существование трех инерционных инвариантов, составленных из компонент тензора инерции и не зависящих от выбора координатных осей. В частности, окажется инвариантным коэффициент при λ^2, равный

$$A' + B' + C',$$

что уже было установлено ранее в п. 1.

6. Основные свойства главных осей инерции. Можно указать на ряд важных свойств, относящихся к главным осям инерции.

a. Пусть ось z является главной осью инерции для начала координат. Тогда для этой оси $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, и уравнения (11) дают

$$D = E = 0, \; C' = \lambda.$$

Обратно, если $D = E = 0$, то уравнение (9) эллипсоида инерции принимает вид:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 2Fxy = 1.$$

Для приведения этого уравнения к главным осям, то есть для уничтожения оставшегося члена с произведением координат, нужно лишь, как известно, сделать поворот осей координат вокруг оси z. Следовательно, ось z является главной осью инерции для начала координат. Этот результат можно сформулировать в виде следующего свойства:

Для того, чтобы какая-либо координатная ось была главной осью инерции для начала координат, необходимо и достаточно, чтобы центробежные моменты инерции, содержащие координату, отвечающую данной оси, равнялись нулю.

b. Пусть система имеет плоскость материальной симметрии, то есть плоскость, относительно которой точки системы расположены симметрично и каждые две симметричные точки имеют одинаковые массы. Примем за ось z перпендикуляр к плоскости симметрии в какой-либо ее точке, а самую плоскость симметрии за плоскость (xy). Тогда каждой точке системы M_i с массой m_i и координатами x_i, y_i, z_i в силу симметрии будет отвечать точка M_i' с той же

массой m_i и координатами x_i, y_i, $-z_i$. Поэтому в выражениях центробежных моментов инерции

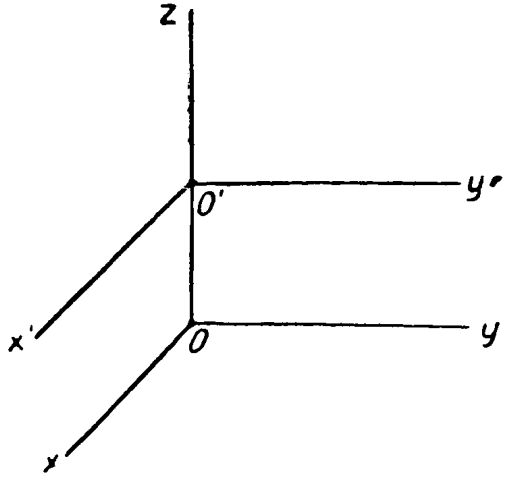
$$D = \sum m_i y_i z_i, \quad E = \sum m_i z_i x_i$$

все члены попарно сократятся, так что $D = E = 0$. Отсюда по предыдущему свойству ось z явится главной осью инерции для начала координат. Таким образом имеем:

Если система материальных точек имеет плоскость материальной симметрии, то в каждой точке этой плоскости одной из главных осей инерции является перпендикуляр к плоскости симметрии.

с. Поставим себе задачу об отыскании на данной оси такой точки, для которой эта ось являлась бы главной осью инерции. Примем заданную ось за ось z координатной системы (фиг. 155), беря начало координат в произвольной точке O и направляя оси x, y тоже произвольным образом.

Пусть искомой точкой является точка O' оси z, для которой $z = OO' = h$. Примем эту точку за начало коорди-



Фиг. 155

натной системы $O'x'y'z'$, направляя ось z' по оси z и беря оси x', y' параллельными осям x, y соответственно. Тогда по первому свойству в системе $O'x'y'z'$ будем иметь

$$D' = \Sigma m_i y_i' z_i' = 0, \quad E' = \Sigma m_i z_i' x_i' = 0.$$

Переходя в этих равенствах к координатам x, y, z по формулам преобразования

$$x' = x, \; y' = y, \; z' = z - h,$$

получим

$$\Sigma m_i y_i z_i - h \Sigma m_i y_i = 0, \quad \Sigma m_i z_i x_i - h \Sigma m_i x_i = 0$$

или

$$D - h \Sigma m_i y_i = 0, \quad E - h \Sigma m_i x_i = 0. \tag{а}$$

Если статические моменты $\Sigma m_i x_i$ и $\Sigma m_i y_i$ отличны от нуля, то есть если ось z не проходит через центр масс системы, то отсюда получаем единственное значение для h

$$h = \frac{D}{\Sigma m_i y_i} = \frac{E}{\Sigma m_i x_i}. \tag{12}$$

Следовательно, *если данная ось не проходит через центр масс системы, то на ней имеется единственная точка, для которой эта ось будет главной осью инерции.* Эта точка называется *главной точкой* оси и ее положение на оси определяется формулой (12).

Если же ось z проходит через центр масс, так что статические моменты в (а) равны нулю, то здесь возможны два случая.

1) Моменты D и E отличны от нуля. Тогда равенства (а) удовлетворяются единственным значением $h = \infty$. Поэтому такую ось z можно считать не имеющей главной точки.

2) $D = E = 0$. В этом случае равенства (а) выполняются при любых значениях h, и поэтому ось z будет главной осью инерции для всех своих точек, в том числе и для лежащего на ней центра масс. Главная ось инерции для центра масс системы называется *главной центральной осью инерции.*

Рассматривая этот последний случай, откажемся от произвола в выборе осей x, y и будем считать, что они направлены по двум другим главным осям инерции для точки O. Тогда будем иметь также

$$F = \Sigma m_i x_i y_i = 0.$$

Пусть точка O' является центром масс системы. При сохранении параллельности осей x', y' осям x, y получим для системы $O'x'y'z'$ (фиг. 155)

$$F' = \Sigma m_i x_i' y_i' = F = 0.$$

А так как условия (а) выполняются и для системы $O'x'y'z'$, то имеем также $D' = E' = 0$. Отсюда следует, что оси x', y', z' будут главными центральными осями инерции. В итоге имеем:

Главная центральная ось инерции является главной осью инерции для всех своих точек, а две другие главные оси инерции в этих точках параллельны двум другим главным центральным осям инерции.

d. Пусть некоторая ось оказалась главной осью инерции для двух своих точек. Принимая эту ось за ось z, будем иметь, что уравнения (а) удовлетворяются двумя различными значениями h. Это возможно лишь при условиях

$$D = E = 0, \quad \Sigma m_i x_i = \Sigma m_i y_i = 0.$$

при которых, как мы только что видели, ось z является главной центральной осью инерции.

Если какая-либо ось является главной осью инерции для двух своих точек, то она будет главной центральной осью инерции.

е. Допустим, что система имеет две взаимно перпендикулярные плоскости материальной симметрии. В таком случае в каждой точке линии пересечения этих плоскостей, по свойству b главными осями инерции являются перпендикуляры к плоскости. Поэтому третьей главной осью инерции в любой точке линии пересечения будет сама эта линия. Но тогда по предыдущему она будет главной центральной осью инерции. Следовательно, имеем:

Если система имеет две взаимно перпендикулярные плоскости материальной симметрии, то линия пересечения этих плоскостей является одной из главных центральных осей инерции.

7. Твердое тело; дополнительные замечания. Прилагая в дальнейшем полученные результаты к абсолютно твердому телу, мы должны компоненты тензора инерции определять с помощью интегралов по объему тела τ, получающихся из формул (1) обычным переходом к пределу. Таким образом, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \int_\tau (y^2 + z^2)\, dm, \quad D = \int_\tau yz\, dm, \\ B' &= \int_\tau (z^2 + x^2)\, dm, \quad E = \int_\tau zx\, dm, \\ C' &= \int_\tau (x^2 + y^2)\, dm, \quad F = \int_\tau xy\, dm, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

что иначе можно записать формулами вида

$$A' = \int_\tau \mu (y^2 + z^2)\, d\tau, \ldots, \quad D = \int_\tau \mu yz\, d\tau, \ldots, \tag{13'}$$

где μ — плотность.

Напоминаем, что если известен момент инерции I_c системы относительно оси, параллельной оси координат и проходящей через центр масс системы, то момент инерции относительно данной координатной оси может быть опре-

делен по теореме Штейнера (§ 33, п. 4); например, для оси x будем иметь

$$A' = I_c + Ma^2,$$

где a — расстояние между осями, M — масса системы.

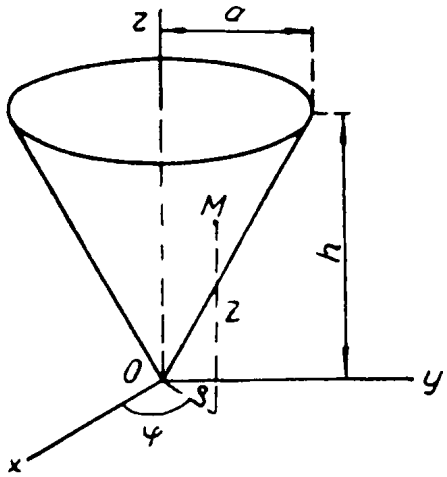
В приложениях часто оказывается полезным представление момента инерции системы относительно оси в виде

$$I = Mi^2, \qquad (14)$$

где i — так называемый *радиус инерции*. Его можно трактовать как радиус воображаемого кругового цилиндра, ось которого совпадает с рассматриваемой осью инерции и на поверхности которого распределена вся масса системы.

Пример. Определить момент инерции однородного кругового конуса относительно его образующей, если радиус основания конуса есть a, а его высота равна h.

Поместим начало координат в вершине конуса (фиг. 156), ось z направим по его оси. Произвольно выбранные оси x и y как перпендикуляры к плоскостям симметрии конуса будут главными осями инерции



Фиг. 156

для точки O, поэтому ось z окажется для нее третьей главной осью инерции. Следовательно, для взятой системы координат $D = E = F = 0$.

В качестве оси, относительно которой требуется найти момент инерции I, можно взять любую образующую. Возьмем ту, которая лежит в плоскости (yz). Ее направляющие косинусы будут

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Поэтому, определяя искомый момент инерции по формуле (3), будем иметь

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = \frac{Ba^2 + Ch^2}{a^2 + h^2}. \qquad (a)$$

Как мы знаем (§ 33, п. 3), момент инерции кругового конуса относительно его оси, то есть оси z, равен

$$C = \frac{3}{10} Ma^2. \tag{b}$$

Поэтому нам остается найти лишь момент инерции

$$B = \mu \int_{\tau} (z^2 + x^2)\, d\tau. \tag{c}$$

Вводя цилиндрическую систему координат ρ, φ, z (фиг. 156), будем иметь для произвольной точки конуса M

$$x = \rho \cos \varphi.$$

Так как элементарный объем есть $d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$, то (c) можно записать в виде

$$B = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^r (z^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi)\, \rho d\rho,$$

где r — радиус поверхности конуса в данном сечении $z = \text{const}$. Производя последовательное интегрирование и принимая во внимание, что $r = \frac{a}{h} z$, находим:

$$B = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(\frac{r^2 z^2}{2} + \frac{r^4}{4} \cos^2 \varphi \right) dz =$$

$$= \mu \frac{a^2}{h^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi \right) d\varphi \int_0^h z^4 dz =$$

$$= \mu \frac{a^2}{h^2} \left(\pi + \frac{1}{4} \frac{a^2}{h^2} \pi \right) \frac{h^5}{5} = \frac{1}{20} \mu \pi a^2 h\, (a^2 + 4h^2).$$

Выделяя массу конуса

$$M = \mu \cdot \frac{1}{3} \pi a^2 h,$$

имеем

$$B = \frac{3}{20} M (a^2 + 4h^2). \tag{d}$$

Подставляя значения (b) и (d) в (a), находим, что момент инерции конуса относительно его образующей будет:

$$I = \frac{3}{20} M \frac{(a^2 + 4h^2)\, a^2 + 2a^2 h^2}{a^2 + h^2} = \frac{3}{20} Ma^2 \frac{a^2 + 6h^2}{a^2 + h^2}.$$

§ 39. Применение общих теорем динамики к твердому телу

1. Теорема о количестве движения. Переходя в выражении количества движения системы

$$Q = \sum m_i v_i$$

к пределу, устремляя число точек к бесконечности, а массу каждой точки к нулю, найдем, что количество движения твердого тела имеет вид:

$$\boldsymbol{Q} = \int_{\tau} \boldsymbol{v}\,dm = \int_{\tau} \rho \boldsymbol{v}\,d\tau. \tag{1}$$

Векторное уравнение теоремы о количестве движения записывается в том же виде, что и для любой системы

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил. Точно так же не меняет своего вида и теорема о движении центра масс

$$M\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{w}_c$ — ускорение центра масс тела.

При применении этих теорем к твердому телу можем рассматривать их как в проекциях на оси некоторой неподвижной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$, так и на подвижные оси системы $Oxyz$, неизменно связанной с телом, имеющей начало в произвольной точке тела O (полюсе). Так, если ξ_c, η_c, ζ_c — координаты центра масс в неподвижной системе отсчета, то в проекциях на неподвижные оси координат получаем из (3) скалярные уравнения движения центра масс

$$M\ddot{\xi}_c = F_{\xi}^{(e)},\ M\ddot{\eta}_c = F_{\eta}^{(e)},\ M\ddot{\zeta}_c = F_{\zeta}^{(e)}. \tag{4}$$

Проектируя же (3) на подвижные оси, имеем:

$$Mw_{cx} = X^{(e)},\ Mw_{cy} = Y^{(e)},\ Mw_{cz} = Z^{(e)}. \tag{5}$$

Правые части в уравнениях (4) и (5) будут проекциями главного вектора внешних сил соответственно на неподвижные и подвижные оси координат.

2. Момент количества движения твердого тела. Снова делая обычный переход к пределу в выражении кинетического момента системы:

$$\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i,$$

найдем, что момент количества движения твердого тела относительно какого-либо центра определяется формулой

$$\boldsymbol{K} = \int_{\tau} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\,dm = \int_{\tau} \rho\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\,d\tau. \tag{6}$$

Будем считать, что центр момента совпадает с полюсом O — началом подвижной системы отсчета $Oxyz$, неизменно

связанной с телом. Скорость произвольной точки тела может быть, как известно из кинематики, представлена в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{v}_0$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Подставляя это значение в (6), имеем:

$$\boldsymbol{K} = \int_\tau (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0)\, dm + \int_\tau \{\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}\, dm.$$

Вынося в первом члене вектор $\boldsymbol{v}_0$ за знак интеграла, записывая двойное векторное произведение по известной формуле и учитывая, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ — общий для всех точек тела, находим:

$$\boldsymbol{K} = \int_\tau \boldsymbol{r}\, dm \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \int_\tau (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\, dm - \int_\tau \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\, dm =$$

$$= M\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \int_\tau r^2 dm - \int_\tau \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\, dm,$$

где $\boldsymbol{r}_c$ — радиус-вектор центра масс относительно полюса.

Ограничимся далее рассмотрением только двух случаев, когда за полюс взят или центр масс системы или же неподвижная точка тела, если таковая имеется. Тогда в первом случае $\boldsymbol{r}_c = 0$, а во втором $\boldsymbol{v}_0 = 0$. Поэтому первый член в выражении для $\boldsymbol{K}$ исчезает. Выражая r^2 через координаты и записывая произведение $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}$ через проекции векторов, получаем:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\omega} \int_\tau (x^2 + y^2 + z^2)\, dm - \int_\tau \boldsymbol{r}\,(px + qy + rz)\, dm,$$

где p, q, r — проекции угловой скорости на подвижные оси координат.

Проектируя на оси полученное выражение, имеем:

$$K_x = p \int_\tau (y^2 + z^2)\, dm - q \int_\tau xy\, dm - r \int_\tau zx\, dm;$$

$$K_y = -p \int_\tau xy\, dm + q \int_\tau (z^2 + x^2)\, dm - r \int_\tau yz\, dm;$$

$$K_z = -p \int_\tau zx\, dm - q \int_\tau yz\, dm + r \int_\tau (x^2 + y^2)\, dm,$$

что согласно (38 — 13) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= A'p - Fq - Er, \\ K_y &= -Fp + B'q - Dr, \\ K_z &= -Ep - Dq + C'r. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Эти формулы выражают проекции кинетического момента твердого тела относительно полюса на произвольные связанные с телом оси координат, когда полюсом является центр масс или неподвижная точка тела. Формулы (7) еще раз подтверждают, что согласно первому данному нами определению тензора таблица тензора инерции $T(I)$ действительно имеет вид (38 — 7); в самом деле из (7) следует, что вектор $\boldsymbol{K}$ получается из вектора $\boldsymbol{\omega}$ по формулам линейного преобразования с коэффициентами, составляющими таблицу (38 — 7).

Если за оси координат приняты главные оси инерции для полюса, то $D = E = F = 0$ и формулы (7) дают

$$K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cr, \tag{8}$$

где A, B, C — главные моменты инерции для неподвижной точки тела или для центра масс.

Из (8) следует, что в общем случае векторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарны между собой. Однако в частных счучаях они могут располагаться на одной прямой, например, когда $A = B = C$, $A = B$ и $r = 0$, $p = q = 0$ и т. д.

Рассмотрим еще момент количества движения K_ω твердого тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через полюс. Обозначая через α, β, γ направляющие косинусы этой оси и беря за оси координат главные оси инерции для полюса, будем иметь, согласно (8):

$$K_\omega = \alpha K_x + \beta K_y + \gamma K_z = A\alpha p + B\beta q + C\gamma r.$$

Но

$$p = \alpha\omega, \quad q = \beta\omega, \quad r = \gamma\omega$$

и предыдущее выражение принимает вид

$$K_\omega = (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)\,\omega,$$

что по (38 — 3) дает окончательно

$$K_\omega = I\omega,$$

где I — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

3. Теорема о моменте количества движения. Динамические уравнения Эйлера. Мы видели в § 33, что если центром моментов является неподвижная точка или центр масс системы, то теорема моментов имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{L}^{(e)},$$

где $\boldsymbol{L}^{(e)}$ — главный момент внешних сил.

Рассматривая это уравнение в подвижных осях координат, мы можем представить его с помощью локальной производной (§ 10, п. 3) в форме

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}^{(e)},$$

что в проекциях на связанные с телом оси координат с началом в рассматриваемом полюсе дает:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + qK_z - rK_y &= L_x^{(e)}, \\ \frac{dK_y}{dt} + rK_x - pK_z &= L_y^{(e)}, \\ \frac{dK_z}{dt} + pK_y - qK_x &= L_z^{(e)}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Эти уравнения и выражают теорему моментов в проекциях на подвижные оси координат, связанные с телом и имеющие начало в центре масс или в неподвижной точке тела. Моменты K_x, K_y и K_z в общем случае выражаются формулами (7), так что при их подстановке уравнения (9) превращаются в систему уравнений для составляющих угловой скорости p, q и r. Поэтому уравнения (9) определяют вращательное движение тела.

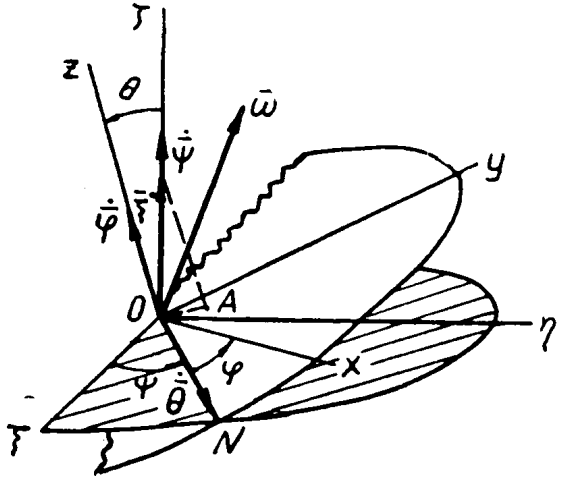
Примем за оси координат главные оси инерции для полюса. Тогда значения K_x, K_y и K_z выразятся формулами (8); подставляя эти значения в (9), придем к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr &= L_x^{(e)}; \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= L_y^{(e)}; \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq &= L_z^{(e)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Эти уравнения называются *уравнениями вращательного движения тела* или *динамическими уравнениями Эйлера*. Они играют фундаментальную роль при изучении вращательного движения твердого тела.

4. Углы Эйлера и кинематические уравнения Эйлера. Как упоминалось в кинематике, положение связанных с телом подвижных осей координат, а следовательно, и положение самого тела при его вращении вокруг неподвижной точки (или центра масс) можно определить так называемыми *углами Эйлера*. Рассмотрим эти углы.

Примем неподвижную точку O за общее начало неподвижной $O\xi\eta\zeta$ и подвижной $Oxyz$ систем координат (фиг. 157). Если же рассматривается вращение тела вокруг центра масс, то подвижные оси сносим параллельно самим себе в принятое начало неподвижной системы отсчета. Линия ON



Фиг. 157

пересечения неподвижной плоскости ($\xi\eta$) с подвижной (xy) называется *линией узлов.*

Углами Эйлера будут:

1) *угол прецессии* ψ, отсчитываемой от оси ξ до линии узлов;

2) *угол собственного вращения* φ, отсчитываемый от линии узлов до оси x;

3) *угол нутации* θ, отсчитываемый от оси ζ до оси z.

Оси, перпендикулярные к плоскостям отсчета углов, имеют те же названия, то есть ось ζ называется *осью прецессии*, ось z — *осью собственного вращения,* линия узлов с направлением от O к N — *осью нутации.* Если, смотря с положительного направления каждой из этих осей на плоскость изменения соответствующего угла, мы видим этот угол при указанном выше направлении отсчета отложенным против стрелки часов, то данный угол считается положительным, а в противном случае — отрицательным. Фиг. 157 построена для положительного значения всех углов, причем стрелки указывают на направление возрастания каждого угла.

Легко видеть, что углы Эйлера полностью определяют направления подвижных осей. В самом деле, зная угол ψ,

мы знаем положение линии узлов и перпендикулярной к ней плоскости осей ζ, z; зная еще угол θ, мы будем знать точное положение оси z, а следовательно и плоскости (xy); наконец, зная угол φ, мы можем указать и точное положение осей x и y в их плоскости.

В соответствии с направлением векторов угловых скоростей, вектор угловой скорости прецессии $\dot{\psi}$ будет направлен по оси ζ, угловой скорости собственного вращения $\dot{\varphi}$ — по оси z и угловой скорости нутации $\dot{\theta}$ — по линии узлов ON. Суммарная угловая скорость ω тела сложится из этих угловых скоростей, то есть будет

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\varphi} + \dot{\theta}.$$

Спроектируем это равенство на подвижные оси координат. Для определения проекций $\dot{\psi}$ достаточно найти направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 оси ζ относительно подвижных осей как проекции на эти оси единичного вектора ζ° оси ζ. Проекция ζ° на плоскость (xy) равна $OA = \sin\theta$. Так как отрезок OA лежит в плоскости (ζz), то он составляет угол $\pi/2$ с линией узлов; поэтому его углы с осями x и y будут соответственно $\pi/2 - \varphi$ и φ. Отсюда следует, что

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi. \tag{11}$$

Кроме того, непосредственно из чертежа фиг. 157 имеем

$$\gamma_3 = \cos\theta. \tag{12}$$

Поэтому проекции $\dot{\psi}$ на подвижные оси будут

$$\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi, \quad \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi, \quad \dot{\psi}\cos\theta.$$

Вектор $\dot{\varphi}$ имеет единственную проекцию в натуральную величину на ось z, а вектор $\dot{\theta}$ имеет проекции только на оси x и y, равные

$$\dot{\theta}\cos\varphi, \quad -\dot{\theta}\sin\varphi$$

соответственно. Таким образом, проекции угловой скорости тела на подвижные оси координат выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Эти формулы носят название *кинематических уравнений Эйлера*.

Проделав аналогичное рассуждение, найдем, что проекции угловой скорости тела на неподвижные оси координат ξ, η, ζ имеют выражения:

$$\left.\begin{aligned} p' &= \dot{\varphi}\sin\Theta\sin\psi + \dot{\Theta}\cos\psi; \\ q' &= -\dot{\varphi}\sin\Theta\cos\psi + \dot{\Theta}\sin\psi; \\ r' &= \dot{\varphi}\cos\Theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

5. Уравнения движения абсолютно твердого тела. Если тело свободно, то уравнения движения центра масс (4) определят поступательное движение тела вместе с этим центром. Другая часть движения тела — его вращение вокруг центра масс — определится динамическими уравнениями Эйлера (10), в которых p, q, r связаны с углами Эйлера уравнениями (13). Поэтому уравнения (4), (10) и (13) могут быть названы уравнениями движения свободного твердого тела. Если значения p, q и r из (13) подставить в уравнения (10), то они окажутся системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно углов Эйлера. Интегрируя эту систему совместно с уравнениями (4), получим шесть параметров ξ_c, η_c, ζ_c, ψ, φ, Θ, определяющих положение тела, как функции времени t и двенадцати произвольных постоянных. Для определения последних необходимо иметь такое же число начальных условий.

Если тело несвободно, то в соответствии с наложенными связями число независимых параметров, определяющих положение тела, уменьшится. Тогда, составляя, например, уравнения Лагранжа второго рода, можем получить и соответственно уменьшенное число уравнений движения твердого тела.

6. Теорема кинетической энергии. Как мы видели (§ 34, п. 2), работа внутренних сил абсолютно твердого тела равна нулю. Поэтому теорема кинетической энергии принимает вид

$$dT = d'A^{(e)} \qquad (15)$$

или в конечном виде

$$T - T_0 = A^{(e)}, \qquad (16)$$

где $A^{(e)}$ — работа внешних сил на рассматриваемом перемещении тела.

В соответствии с выражением кинетической энергии всякой системы

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2,$$

кинетическая энергия твердого тела будет

$$T = \frac{1}{2}\int_\tau v^2 dm = \frac{1}{2}\int_\tau \mu v^2 d\tau.$$

Обычно же оказывается более удобным пользоваться теоремой Кёнига, согласно которой, как мы знаем, кинетическая энергия твердого тела имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{17}$$

где M — масса тела, v_c — скорость центра масс, I — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс, ω — угловая скорость тела.

Беря за подвижные оси координат главные центральные оси инерции, можем, согласно (38—3), записать (17) в форме

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)\omega^2,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы мгновенной оси вращения с подвижными осями. Но

$$\alpha\omega = p, \quad \beta\omega = q, \quad \gamma\omega = r.$$

Поэтому окончательно будем иметь

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{18}$$

Здесь A, B, C — главные центральные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции.

Если тело вращается вокруг неподвижной точки, то

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{19}$$

где I — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку. Повторяя такие же рассуждения, как и выше, найдем для этого случая

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{20}$$

причем A, B, C будут главными моментами инерции для неподвижной точки, p, q, r — проекции угловой скорости тела на главные оси инерции в этой точке.

Легко показать, что теорема кинетической энергии будет справедлива и для относительного движения тела по отношению к системе осей, движущихся поступательно вместе с центром масс.

В самом деле второй член в выражении (17)

$$T_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

есть кинетическая энергия системы в указанном относительном движении.

Если ρ_i — радиусы-векторы точек приложения внешних сил в неподвижной системе отсчета, r_i — в подвижной системе, то $\rho_i = \rho_c + r_i$. Пусть n — число внешних сил; тогда элементарная работа этих сил будет

$$d'A^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_i = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_c + \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i =$$

$$= \boldsymbol{F}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_c + d'A_r^{(e)},$$

где

$$d'A_r^{(e)} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

есть работа внешних сил в относительном движении системы.

Теорема в форме (15) может быть записана в виде

$$d\left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right) + dT_r = \boldsymbol{F}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_c + d'A_r^{(e)}.$$

Согласно же теореме о движении центра масс для него имеет силу теорема кинетической энергии

$$d\left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right) = \boldsymbol{F}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_c.$$

Тогда из предыдущего равенства следует

$$dT_r = d'A_r^{(e)},$$

что и требовалось доказать. В конечном виде будем иметь

$$T_r - T_{r0} = A_r^{(e)},$$

где

$$A_r^{(e)} = \int_{(I)}^{(II)} d'A_r^{(e)}$$

есть работа внешних сил при относительном перемещении тела из начального положения I в конечное положение II.

Заметим, что доказанная теорема имеет место и для относительного движения всякой системы с той только разницей, что кинетическая энергия T_r имеет в общем случае другой вид.

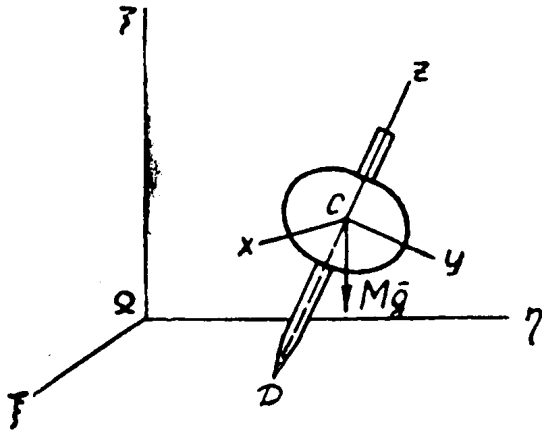
Пример. Тяжелый симметричный волчок поставлен острием ножки D (фиг. 158) на идеально гладкую горизонтальную плоскость, и ему сообщена угловая скорость ω вокруг его оси симметрии. Определить последующее движение волчка.

Примем горизонтальную плоскость за плоскость $(\xi\eta)$ неподвижной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, направляя ось ζ вертикально вверх. Начало подвижной системы отсчета возьмем в центре тяжести тела C, ось z этой системы направим по оси симметрии волчка.

Если $l = CD$ есть расстояние центра тяжести от точки опоры волчка, то во все время движения будет выполняться соотношение

$$\zeta_c = l \cos \theta, \qquad (a)$$

где ζ_c — координата центра тяжести по оси ζ, а θ — угол нутации. Следовательно, для шести параметров — координат центра тяжести ξ_c, η_c, ζ_c и углов Эйлера ψ, φ, θ, определяющих положение тела, будет выполняться уравнение связи (а); поэтому независимых параметров будет только



Фиг. 158

пять. Примем за эти параметры ξ_c, η_c, ψ, φ, θ, имея в виду, что ζ_c всегд найдется по уравнению (а).

Дифференциальные уравнения движения волчка составим в виде уравнений Лагранжа второго рода, отвечающих принятым независимым параметрам. В силу симметрии волчка имеем $A = B$, и выражение (18) для кинетической энергии тела можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2}\left[M\left(\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2 + \dot{\zeta}_c^2\right) + A\left(p^2 + q^2\right) + Cr^2\right].$$

Подставляя сюда ζ_c из (а), p, q и r из кинематических уравнений Эйлера (13), получаем

$$T = \frac{1}{2}\left[M\left(\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2 + l^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2\right) + A\left(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + C\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)^2\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_c} = M\dot{\xi}_c, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_c} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_c} = M\dot{\eta}_c, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta_c} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\sin^2\theta \cdot \dot{\psi} + C\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)\cos\theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(Ml^2 \sin^2\theta + A\right)\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = (Ml^2\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2)\sin\theta\cos\theta - C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\sin\theta\cdot\dot{\psi}.$$

Единственной активной силой является сила тяжести, приложенная в центре тяжести тела. Она имеет потенциал

$$U = -Mg\zeta_c = -Mgl\cos\theta.$$

Отсюда будет вытекать, во-первых, что согласно формуле

$$Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r}$$

отличной от нуля будет только обобщенная сила, отвечающая углу θ, а, во-вторых, будет существовать интеграл энергии

$$T = U + h,$$

принимающий в данном случае вид:

$$M(\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2) + (Ml^2\sin^2\theta + A)\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 = -2Mgl\cos\theta + h. \qquad (b)$$

Этим интегралом мы заменим уравнение Лагранжа для угла θ, имеющее здесь достаточно сложный вид. Уравнения же, отвечающие остальным независимым параметрам, согласно общему виду уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r,$$

примут вид:

$$\ddot{\xi}_c = 0, \quad \ddot{\eta}_c = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[A\sin^2\theta\cdot\dot{\psi} + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = 0.$$

Отсюда получаем четыре первых интеграла:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\xi}_c = C_1, \quad \dot{\eta}_c = C_2, \\ &A\sin^2\theta\cdot\dot{\psi} + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta = C_3, \\ &\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = C_4. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Начальные условия в данной задаче будут: при $t = 0$ $\dot{\xi}_c = \dot{\eta}_c = 0$, $\dot{\psi} = 0$ $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \theta_0$. Определяя постоянные интегрирования, входящие в (b) и (c), по этим условиям, находим:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = C\omega\cos\theta_0, \quad C_4 = \omega,$$

$$h = C\omega^2 + 2Mgl\cos\theta_0.$$

Поэтому интегралы (b) и (c) примут окончательный вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\xi}_c = 0, \quad \dot{\eta}_c = 0, \\ &(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\dot{\psi} = C(\omega\cos\theta_0 - \dot{\varphi}\cos\theta), \\ &\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = \omega, \\ &(Ml^2\sin^2\theta + A)\dot{\theta}^2 + A\sin^2\theta\cdot\dot{\psi}^2 = 2Mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

Из первых двух равенств (d) следует, что

$$\xi_c = \xi_{c0}, \quad \eta_c = \eta_{c0},$$

где ξ_{c0}, η_{c0} — начальные значения координат. Таким образом, волчок будет двигаться так, что его центр тяжести во все время движения будет оставаться на одной и той же вертикали.

Из четвертого уравнения (d) имеем

$$\dot{\varphi} = \omega - \dot{\psi}\cos\theta.$$

Подставляя это выражение в третье уравнение (d), находим после сокращения

$$A\sin^2\theta\cdot\dot{\psi} = C\omega(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

откуда

$$\dot{\psi} = \frac{C\omega}{A}\,\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta}. \qquad (e)$$

Отсюда находим также

$$\dot{\varphi} = \omega\left(1 - \frac{C}{A}\,\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right). \qquad (f)$$

Подставляя значение $\dot{\psi}$ из (e) в последнее уравнение (d), получим дифференциальное уравнение первого порядка только для угла θ. Интегрируя это уравнение, найдем закон изменения угла $\theta = \theta(t)$. После этого из (a) найдем $\zeta_c = \zeta_c(t)$, а по формулам (e) и (f) получим $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ как функции от времени; беря еще квадратуры от этих выражений, найдем сами углы $\psi = \psi(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Тем самым закон движения волчка будет установлен полностью. Однако дифференциальное уравнение для θ имеет сложный нелинейный вид, и здесь приходится довольствоваться каким-либо приближенным интегрированием этого уравнения. Рассмотрение этого вопроса ввиду его сложности мы опускаем.

§ 40. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

1. Уравнение движения. Мы видели ранее (§ 33, п. 2), что для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, справедлива теорема моментов в виде

$$I\frac{d\omega}{dt} = L_z^{(e)}, \qquad (1)$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, ω — угловая скорость вращения тела, $L_z^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно этой оси. Уравнение (1) и будет уравнением движения тела в данном случае.

Из кинематики известно, что положение рассматриваемого тела определяется двугранным углом φ между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения, причем одна плоскость неподвижна, а другая неизменно связана с телом и вращается вместе с ним. Так как $\omega = \dot{\varphi}$, то уравнение (1) можно переписать в форме

$$I\ddot{\varphi} = L_z^{(e)}, \qquad (1')$$

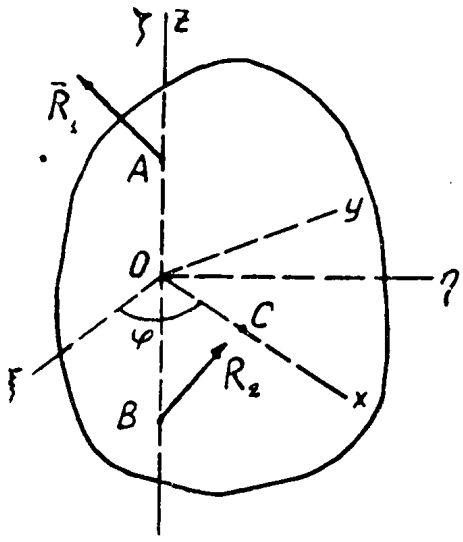
то есть в форме дифференциального уравнения второго порядка относительно независимого параметра φ.

В результате интегрирования уравнения (1′) получим общее решение вида

$$\varphi = \varphi(t, C_1, C_2).$$

Для установления окончательного закона вращения тела нужно произвольные постоянные C_1 и C_2 найти из двух начальных условий, для чего необходимо знать начальные значения $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

2. Определение реакций опор. Примем ось вращения тела за ось ζ неподвижной системы координат (фиг. 159), плоскость $(\xi\eta)$ этой системы проведем через центр масс тела C. Начало подвижной системы $Oxyz$ возьмем совпадающим с началом O неподвижной системы, беря ось z идущей тоже по оси вращения, а ось x проводим через центр масс системы. Угол поворота тела можно измерять линейным углом φ между осями ξ и x.



Фиг. 159

Для фиксации оси вращения тела достаточно, как мы видели в кинематике, закрепить любые две точки A и B оси. Эти точки будем называть опорами оси. Вследствие вращения тела и действия на него активных сил на опорах возникнут некоторые реакции, которые назовем для точки A через $\boldsymbol{R}_1$, а для точки B через $\boldsymbol{R}_2$.

Отбрасывая опоры и заменяя их действие реакциями, можем, по аксиоме связей, рассматривать тело как свободное, находящееся под действием активных сил и сил реакций связей. Для такого тела можно записать шесть уравнений движения свободного тела—три уравнения движения центра масс и три уравнения моментов. Все эти уравнения запишем в проекциях на подвижные оси координат. Так как эти оси, вообще говоря, не являются главными осями инерции для начала координат, то уравнения моментов нужно брать в общей форме (39—9), а не в форме уравнений Эйлера (39—10). Проекции моментов реакций составим по общим формулам вида:

$$y_i R_{iz} - z_i R_{iy}, \quad z_i R_{ix} - x_i R_{iz}, \quad x_i R_{iy} - y_i R_x,$$

с учетом того, что опоры имеют единственные отличные от нуля координаты по оси z, которые мы обозначим через a и b соответственно. Тогда получим уравнения:

$$Mw_{cx} = X + R_{1x} + R_{2x};$$

$$Mw_{cy} = Y + R_{1y} + R_{2y};$$

$$Mw_{cz} = Z + R_{1z} + R_{2z};$$

$$\frac{dK_x}{dt} + qK_z - rK_y = L_x - aR_{1y} - bR_{2y};$$

$$\frac{dK_y}{dt} + rK_x - pK_z = L_y + aR_{1x} + bR_{2x};$$

$$\frac{dK_z}{dt} + pK_y - qK_x = L_z;$$

где X, Y, Z — проекции главного вектора внешних активных сил, а L_x, L_y, L_z — главные моменты этих сил относительно подвижных осей координат.

Вводя обозначение $h = OC$, видим, что центр масс тела, имеющий единственную отличную от нуля координату $x_c = h$, будет при движении тела описывать в плоскости $(\xi\eta)$ окружность радиуса h, а проекции его ускорения w_{cx} и w_{cy} будут совпадать соответственно с нормальным и касательным ускорениями к окружности, с той только поправкой, что ось x будет противоположна положительной нормали. Поэтому будем иметь

$$w_{cx} = -h\omega^2, \quad w_{cy} = h\dot{\omega}, \quad w_{cz} = 0,$$

где $\omega = \dot{\varphi}$ есть по-прежнему угловая скорость тела.

Вектор угловой скорости направлен по оси z, следовательно,

$$p = q = 0, \quad r = \omega.$$

Проекции кинетического момента согласно (39—7) будут

$$K_x = -E\omega, \quad K_y = -D\omega, \quad K_z = C'\omega.$$

В итоге уравнения движения тела примут окончательный вид:

$$\left.\begin{aligned}
&-Mh\omega^2 = X + R_{1x} + R_{2x};\\
&Mh\dot{\omega} = Y + R_{1y} + R_{2y};\\
&0 = Z + R_{1z} + R_{2z};\\
&-E\dot{\omega} + D\omega^2 = L_x - aR_{1y} - bR_{2y};\\
&-D\dot{\omega} - E\omega^2 = L_y + aR_{1x} + bR_{2x};\\
&C'\dot{\omega} = L_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (1) движения тела, ибо C' имеет тот же смысл, что и I. Остальные же пять уравнений служат для определения реакций опор. При этом видим, что осевые реакции R_{1z} и R_{2z} входят только в третье уравнение, из которого можно найти лишь их сумму. Поэтому для определения каждой из этих реакций необходимо иметь какое-то добавочное условие. Таким условием обычно является задание характера подшипников, установленных в точках A и B. Так, если известно, что, например, опора A является *цилиндрическим* подшипником, не воспринимающим осевых усилий, то в ней $R_{1z} = 0$, и осевая реакция во втором подшипнике окажется равной $R_{2z} = -Z$; такой подшипник, оказывающий сопротивление не только боковым, но и осевым усилиям, называется *подпятником*.

Для определения составляющих боковых реакций R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y} будем иметь четыре уравнения (два первых, четвертое и пятое), из которых они полностью могут быть найдены.

Боковые реакции R_{ix}, R_{iy} $(i = 1, 2)$ можно разделить на реакции статические $R_{ix}^{(s)}$, $R_{iy}^{(s)}$ и реакции динамические $R_{ix}^{(d)}$, $R_{iy}^{(d)}$. Статическая часть реакций определится указанными четырьмя уравнениями, если принять, что никакого вращения тела нет, то есть если $\omega = 0$, $\dot{\omega} = 0$. Следовательно, статические реакции находятся из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X + R_{1x}^{(s)} + R_{2x}^{(s)};\\ 0 &= Y + R_{1y}^{(s)} + R_{2y}^{(s)};\\ 0 &= L_x - aR_{1y}^{(s)} - bR_{2y}^{(s)};\\ 0 &= L_y + aR_{1x}^{(s)} + bR_{2x}^{(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Вычитая уравнения (3) из соответствующих уравнений (2), найдем, что динамические реакции, возникающие при вращении тела, будут определяться уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} -Mh\omega^2 &= R_{1x}^{(d)} + R_{2x}^{(d)};\\ Mh\dot{\omega} &= R_{1y}^{(d)} + R_{2y}^{(d)};\\ -E\dot{\omega} + D\omega^2 &= -aR_{1y}^{(d)} - bR_{2y}^{(d)};\\ -D\dot{\omega} - E\omega^2 &= aR_{1x}^{(d)} + bR_{2x}^{(d)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3. Постоянная и свободная оси вращения. Пусть $a = 0$, $D = E = 0$, так что опора A находится в начале координат и ось вращения является главной осью инерции для этой точки. Тогда из двух последних урав-

нений (4) имеем $R_{2x}^{(d)} = R_{2y}^{(d)} = 0$, то есть динамическая реакция в опоре B равняется нулю. Если эта опора имеет характер цилиндрического подшипника, то $R_{2z} = 0$; если, кроме того, активные внешние силы таковы, что $L_x = L_y = 0$, то, согласно двум последним уравнениям (3), будем иметь $R_{2x}^{(s)} = R_{2y}^{(s)} = 0$. Следовательно, в этом случае в опоре B не будет никаких реакций, поэтому она не нужна и может быть отброшена.

При отсутствии внешних активных сил приведенные выше рассуждения будут справедливы для любой точки тела A. Кроме того, в силу последнего уравнения (2), $\dot{\omega} = 0$, поэтому $\omega = \text{const}$. Получаем важный результат:

Если твердое тело, свободное от действия внешних активных сил, привести во вращение вокруг одной из главных осей инерции для какой-либо закрепленной точки тела, то оно будет равномерно вращаться вокруг этой оси во все последующее время.

На основании этого свойства главные оси инерции для любой точки тела называются *постоянными* осями вращения.

Если внешние активные силы не эквивалентны нулю и имеют равнодействующую, то установленное свойство будет справедливо для всех точек линии действия равнодействующей, ибо относительно всякой такой точки $L = 0$, а ее закрепление дает $R_{2z} = 0$. В этом случае, в силу первых трех уравнений (2), равнодействующая активных сил будет уравновешиваться с реакцией опоры и с направленной по оси x силой инерции $Mh\dot{\omega}^2$.

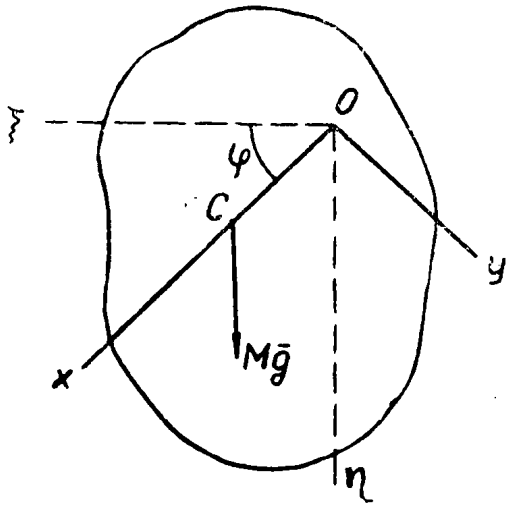
Другой важный частный случай получается тогда, когда ось вращения является главной центральной осью инерции. В этом случае центр масс C будет лежать на оси вращения, совпадая с началом координат O; поэтому $h = 0$, $D = E = 0$. Левые части всех уравнений (4) обращаются в нули, а полученные таким путем две пары однородных уравнений будут иметь, как легко убедиться, только нулевые решения. Следовательно, динамические реакции будут отсутствовать на обеих опорах. Тогда при отсутствии внешних активных сил могут быть отброшены обе опоры, ибо в силу уравнений (3) и третьего уравнения (2) будут равны нулю и все статические реакции. Отсюда следует:

Если свободное твердое тело, на которое не действуют никакие внешние силы, привести во вращение вокруг одной из главных центральных осей инерции, то оно будет равномерно вращаться вокруг этой оси и во все последующее время.

По этой причине главные центральные оси инерции тела называются *свободными* или *естественными* осями вращения.

Отсутствие динамических реакций при точном совпадении оси вращения с одной из главных центральных осей инерции используется на практике в быстро вращающихся машинах. Однако наличие производственных допусков приводит к тому, что параметры h, D, и E в действительности несколько отличаются от нуля, и тогда уравнения (4) позволяют найти максимально допустимые значения ω и $\dot{\omega}$, при которых динамические реакции не достигали бы опасных для прочности значений.

Пример. Тяжелое твердое тело с массой M имеет неподвижную точку O (фиг. 160), в которой одна из главных осей инерции Oz горизонтальна и перпендикулярна плоскости чертежа, а прямая OC, соединяющая точку O с центром тяжести C, перпендикулярна этой оси.



Фиг. 160

В начальный момент центр тяжести находится на горизонтальной оси $O\xi$. Предоставленное самому себе тело под действием силы тяжести придет в движение. Определить реакцию опор в этом движении, если $OC = h$.

Под действием силы тяжести тело начнет сначала вращаться вокруг оси Oz. Примем точку O за опору A, рассмотренную в предыдущей теории. Учитывая еще, что ось Oz есть главная ось инерции для O, будем иметь $a = 0$, $D = E = 0$, если точку O принять за начало координат. Кроме того, единственная внешняя активная сила—сила тяжести Mg — лежит в плоскости (xy) и поэтому $L_x = L_y = 0$. Следовательно, ось Oz окажется постоянной осью вращения, не нуждающейся ни в какой другой опоре. Поэтому реакции R в опоре O найдется из первых трех уравнений (2), в которых нужно положить $R_2 = 0$, $R_1 = R$. Считая ось x направленной по OC и учитывая значения проекций силы тяжести, получаем уравнения:

$$-Mh\omega^2 = Mg\sin\varphi + R_x; \qquad \text{(a)}$$

$$Mh\dot{\omega} = Mg\cos\varphi + R_y; \qquad \text{(b)}$$

$$0 = R_z.$$

Присоединяя еще последнее уравнение (2), принимающее в данном случае вид:

$$C'\dot{\omega} = Mgh\cos\varphi,$$

находим

$$\dot{\omega} = \frac{Mgh}{C'}\cos\varphi. \qquad (c)$$

Так как $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, то после умножения выражения (c) на $\dot{\varphi}dt = d\varphi$, получаем

$$\ddot{\varphi}\,\dot{\varphi}\,dt = \frac{Mgh}{C'}\cos\varphi d\varphi.$$

Производя интегрирование и учитывая, что при $\varphi = 0$ $\dot{\varphi} = \omega = 0$, находим:

$$\omega^2 = \frac{2Mgh}{C'}\sin\varphi. \qquad (d)$$

Подставляя значения (c) и (d) в (a) и (b), получаем решение задачи:

$$R_x = -Mg\left(1 + \frac{2Mh^2}{C'}\right)\sin\varphi;$$

$$R_y = -Mg\left(1 - \frac{Mh^2}{C'}\right)\cos\varphi.$$

Первые члены этих выражений дают статическую реакцию, вторые — динамическую. Реакция опоры оказалась нормальной к оси вращения.

4. Физический маятник. Теорема Гюйгенса. Физическим маятником называется твердое тело, способное под действием силы тяжести вращаться вокруг горизонтальной оси.

Применяя те же оси, что и в общей теории, направим неподвижную ось ξ вертикально вниз (фиг. 161). Ось вращения z считаем направленной от плоскости чертежа к нам. Момент внешних сил относительно оси z будет равен моменту равнодействующей сил веса Mg, приложенной в центре тяжести тела. Считая по-прежнему $OC = h$, найдем

$$L_z^{(e)} = -Mgh\sin\varphi.$$

Поэтому уравнение движения тела (1′) примет вид

$$I\ddot{\varphi} = -Mgh\sin\varphi$$

или

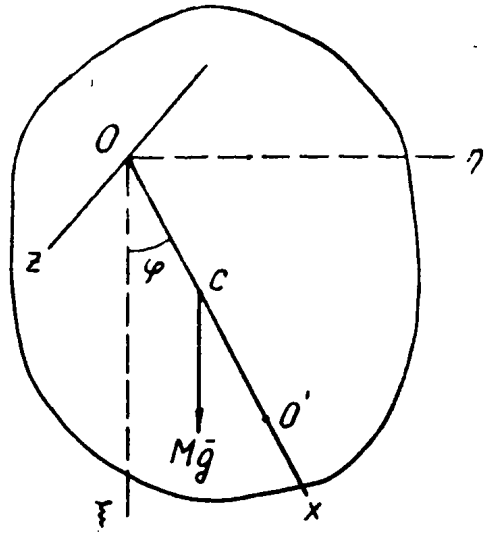
$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{I}\sin\varphi = 0.$$

Видим, что это уравнение совпадает с уравнением кругового математического маятника (§ 27, п. 4) имеющего длину

$$l = \frac{I}{Mh}. \qquad (5)$$

Эта длина называется *приведенной* длиной физического маятника.

Таким образом, если в известном решении задачи о движении кругового маятника его длину заменить по (5), то получим решение задачи о движении физического маятни-



Фиг. 161

ка. Так, при малых колебаниях закон движения кругового маятника есть

$$\varphi = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \varepsilon\right),$$

а период его колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поэтому физический маятник при малых колебаниях будет двигаться по закону

$$\varphi = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I}}\, t + \varepsilon\right),$$

имея период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}}. \qquad (6)$$

Здесь α и ε — постоянные интегрирования.

Такое же преобразование можно применить и для колебаний конечной амплитуды.

Момент инерции тела I относительно оси вращения можно выразить через момент инерции I_c относительно парал-

лельной оси, проходящей через центр масс, по теореме Штейнера:

$$I = I_c + Mh^2.$$

Подставляя это значение в (5), находим:

$$l = \frac{I_c}{Mh} + h. \qquad \text{(a)}$$

Отсюда следует, что $l > h$. Если отрезок l отложить от точки O по оси x, то получим точку O', в которой должен находиться круговой маятник, колеблющийся одинаково с данным физическим; эта точка называется *центром качаний* физического маятника, а точка O — *точкой подвеса*.

Можно доказать следующую теорему Гюйгенса:

Точки O и O' обладают свойством переместительности, то есть, если центр качаний сделать точкой подвеса, то новым центром качаний станет прежняя точка подвеса.

Обозначим приведенную длину маятника в его новом положении через l_1, а расстояние центра масс $O'C$ от новой оси вращения через h_1. Согласно (a) будем иметь

$$l_1 = \frac{I_c}{Mh_1} + h_1. \qquad \text{(b)}$$

Так как

$$l = h + h_1,$$

то сличением с (a) находим;

$$h_1 = \frac{I_c}{Mh}.$$

Подставляя это выражение в знаменатель первого члена правой части выражения (b), получаем

$$l_1 = h + h_1 = l,$$

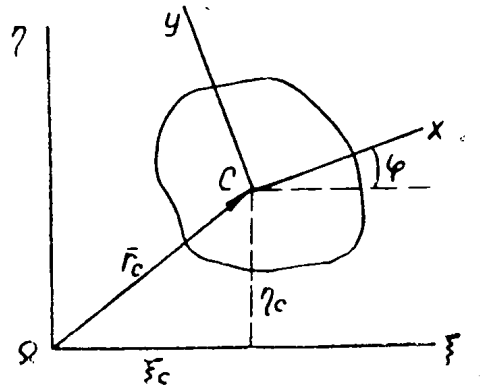
что и требовалось доказать.

Физический маятник лежит в основе ряда физических приборов. Так, наблюдая малые колебания физического маятника специального устройства и определяя их период, можем из формулы (6) найти ускорение земного притяжения g в данном месте Земли. Та же формула (6) может быть использована для экспериментального определения момента инерции I относительно оси, если наблюдать период колебаний тела вокруг этой оси. Физический маятник с наклонной осью, близкой к вертикали, имеющий большой период колебаний, является основой сейсмографа — прибора, служащего для регистрации колебаний земной коры.

§ 41. Движение твердого тела параллельно неподвижной плоскости

1. Уравнения движения. Как известно из кинематики, плоско-параллельное движение твердого тела определяется движением плоской фигуры в ее плоскости. Плоская фигура может быть взята в любом сечении тела плоскостью, параллельной неподвижной.

В динамике такое сечение удобно провести через центр масс тела C (фиг. 162). Если в плоскости этого сечения взять неподвижную систему координат $\Omega\xi\eta$, то положение плоской фигуры относительно этой системы будет определять поло-



Фиг. 162

жение всего тела. Отсюда следует, что положение тела будет известно, если будут найдены как функции времени параметры, определяющие положение плоской фигуры: координаты центра масс ξ_C, η_C и угол φ между осями ξ и x. При этом подвижная система координат Cxy, связанная с плоской фигурой, берется с началом в центре масс тела.

Два уравнения движения дает теорема о движении центра масс системы в проекциях на неподвижные оси координат

$$M\ddot{\xi}_C = F_\xi^{(e)}, \quad M\ddot{\eta}_C = F_\eta^{(e)}, \tag{1}$$

где $F_\xi^{(e)}$, $F_\eta^{(e)}$ — проекции главного вектора внешних сил, приложенных к телу.

Движение фигуры относительно центра масс представляет собой ее вращение вокруг подвижной оси z, проходящей через C и перпендикулярной плоскости фигуры. Теорема моментов для относительного движения системы около центра масс дает в этом случае уравнение

$$I\ddot{\varphi} = L_z^{(e)}, \tag{2}$$

где I — момент инерции тела относительно оси z, $L_z^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно той же оси.

Три уравнения (1), (2) и являются дифференциальными уравнениями плоско-параллельного движения твердого тела. Интегрируя эти уравнения, мы найдем параметры ξ_c, η_c, φ как функции времени и тем самым, удовлетворив еще начальным данным, найдем закон движения тела.

2. Первые интегралы уравнений движения. Общие теоремы динамики могут доставить первые интегралы уравнений движения, заменяющие собой некоторые из уравнений движения.

a. Если главный вектор внешних сил равен нулю, то уравнения (1) имеют интегралы

$$\dot{\xi}_c = C_1, \quad \dot{\eta}_c = C_3,$$

откуда следует, что центр масс тела движется прямолинейно и равномерно по закону

$$\xi_c = C_1 t + C_2, \quad \eta_c = C_3 t + C_4.$$

Для получения общего решения в этом случае остается еще проинтегрировать уравнение (2).

b. Если активные внешние силы имеют потенциал U, а связи или отсутствуют, или идеальны и неподвижны, то будет существовать интеграл энергии

$$T = U + h, \tag{3}$$

где кинетическая энергия тела по теореме Кёнига есть

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2;$$

при этом, как и в (2), I — момент инерции тела относительно подвижной оси Cz, остающейся во все время движения перпендикулярной плоскости фигуры.

c. Если главный момент $L_z^{(e)}$ внешних сил относительно подвижной оси Cz равен нулю, то уравнение (2) имеет интеграл

$$I\dot{\varphi} = C,$$

что, в силу постоянства I, дает

$$\dot{\varphi} = C_1. \tag{4}$$

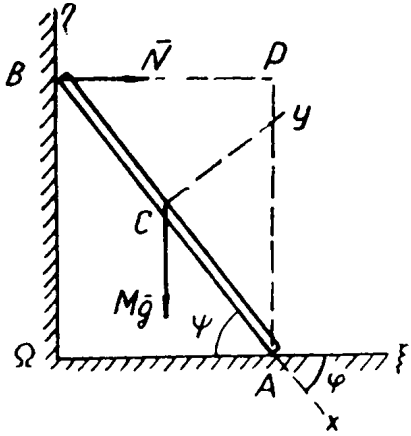
Следовательно, в этом случае плоская фигура, а с ней и все тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью.

Из (4) следует, что

$$\varphi = C_1 t + C_2,$$

и для получения общего решения необходимо еще найти интегралы уравнений (1).

Пример. Тяжелый однородный стержень AB (фиг. 163) опирается концом A на идеально гладкий пол, а концом B — на идеально гладкую стену. Предоставленный самому себе, стержень начинает падать. Найти, при каком положении стержня верхний его конец отделится от стены.



Фиг. 163

Активной внешней силой является сила тяжести, приложенная в центре тяжести стержня C и имеющая потенциал. Так как, кроме того, связи неподвижны и идеальны, то будет иметь место интеграл энергии (3).

Выберем неподвижную $\Omega\xi\eta$ и подвижную Cxy системы осей, как указано на чертеже. Обозначая через ψ величину угла между стержнем и полом и учитывая, что этот угол при падении стержня уменьшается, будем иметь для угловой скорости

$$\omega = -\dot{\varphi} = -\dot{\psi}.$$

Потенциал силы тяжести есть $U = -Mg\eta_C$. Поэтому интеграл энергии можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(Mv_c^2 + I\dot{\psi}^2) = -Mg\eta_C + h. \qquad (a)$$

Пересечение перпендикуляров, восстановленных к полу и стене в точках A и B, дает мгновенный центр скоростей стержня P. Обозначая через $2l$ длину стержня, будем иметь

$$v_c = l\omega = -l\dot{\psi}.$$

Момент инерции стержня есть

$$I = \frac{1}{3}Ml^2.$$

Подставляя эти значения, а также значение

$$\eta_C = l\sin\psi,$$

получим из (a) уравнение

$$\frac{2}{3}Ml^2\dot{\psi}^2 = -Mgl\sin\psi + h.$$

Пусть в начальный момент $\psi = \alpha$. Так как в этот момент $\dot{\psi} = 0$, то

$$h = Mgl\sin\alpha.$$

Поэтому предыдущее равенство приводит к уравнению

$$\dot{\psi}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}(\sin\alpha - \sin\psi). \qquad (b)$$

Уравнение движения центра масс будет

$$M\ddot{\xi}_c = N,$$

где N — реакция стены в точке B. В момент отделения стержня от стены N обращается в нуль, поэтому в этот момент $\ddot{\xi}_c = 0$. Но

$$\xi_c = l\cos\psi,\ \dot{\xi}_c = -l\sin\psi\cdot\dot{\psi},$$

$$\ddot{\xi}_c = -l(\sin\psi\ddot{\psi} + \cos\psi\cdot\dot{\psi}^2).$$

Следовательно, в этот момент

$$\ddot{\psi}\sin\psi+\dot{\psi}^2\cos\psi=0. \qquad (c)$$

Дифференцируя (b), имеем

$$2\dot{\psi}\ddot{\psi}=-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\psi\cdot\dot{\psi},$$

откуда

$$\ddot{\psi}=-\frac{3}{4}\frac{g}{l}\cos\psi.$$

Подставляя это значение, а также значение $\dot{\psi}^2$ из (b) в (c), находим после сокращений

$$-\sin\psi+2(\sin\alpha-\sin\psi)=0,$$

откуда

$$\sin\psi=\frac{2}{3}\sin\alpha.$$

Этот результат означает, что в момент отрыва стержня от стены его верхний конец опустится на 1/3 его первоначальной высоты.

§ 42. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

1. Введение. В § 39 мы видели, что если направления осей подвижного координатного триэдра $Oxyz$, неизменно связанного с телом, относительно неподвижного $O\xi\eta\zeta$ определять углами Эйлера ψ, φ, θ, то эти параметры могут быть найдены как функции времени в результате интегрирования динамических уравнений Эйлера (39 — 10) и кинематических (39 — 13). Поэтому эти уравнения являются основными уравнениями для задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки O.

В то же время мы видели, что теми же самыми уравнениями определяется вращательное движение тела вокруг его центра масс; поэтому, решив еще задачу о поступательном движении тела вместе с его центром масс, мы сможем полностью найти движение тела и во всяком другом случае. Отсюда следует, что рассматриваемая далее задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки имеет общее значение для любого движения абсолютно твердого тела.

2. Вращение по инерции. Первые интегралы. Изучение движения тела вокруг неподвижной точки начнем с простейшего случая вращения по инерции, называемого еще *случаем Эйлера-Пуансо*, когда $L^{(e)}=0$, то есть когда главный момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Это имеет место, например, при отсутствии внешних сил, а также при относительном вращении свободного тяжелого твердого тела вокруг его центра масс.

Динамические уравнения Эйлера (39 — 10) принимают здесь вид:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr&=0;\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp&=0;\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти уравнения позволяют получить три первых интеграла движения. Умножая первое уравнение (1) на p, второе на q, третье на r и складывая результаты, приходим к равенству:

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0,$$

которое доставляет первый интеграл

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=h. \qquad (2)$$

Поскольку $L^{(e)}=0$, то внешние силы или отсутствуют, или равнодействующая активных сил уравновешивается с реакцией опоры. Поэтому потенциальную энергию внешних сил можно считать постоянной. А так как выражение в левой части (2) есть удвоенная кинетическая энергия тела, то этот интеграл есть интеграл энергии; здесь h является постоянной интегрирования.

Если уравнения (1) умножить соответственно на Ap, Bq, Cr и тоже сложить, то получим:

$$A^2p\frac{dp}{dt}+B^2q\frac{dq}{dt}+C^2r\frac{dr}{dt}=0.$$

Интегрируя, находим:

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=K^2. \qquad (3)$$

Для уяснения смысла этого интеграла заметим, что из теоремы моментов

$$\frac{dK}{dt}=L^{(e)},$$

следует, что так как $L^{(e)}=0$, кинетический момент K твердого тела постоянен. В то же время, как мы знаем, величины Ap, Bq, Cr являются проекциями вектора K на подвижные оси координат. Поэтому интеграл (3) выражает постоянство модуля кинетического момента и, следовательно, может быть назван интегралом моментов, в котором постоянная интегрирования K^2 есть квадрат модуля вектора K.

Третий интеграл в общем случае, когда все главные моменты инерции A, B, C отличны друг от друга, получается

достаточно сложным путем, и мы опустим его получение. Укажем только, что окончательное решение как для проекций угловой скорости, так и для углов Эйлера, определяемых из кинематических уравнений (39 — 13), окажется выраженным с помощью эллиптических функций.

Существует, однако, частный случай задания начальных условий, при котором решение получается в элементарных функциях. Разрешая равенство (2) относительно Bq^2 и подставляя полученное значение в (3), придем к уравнению

$$A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 = K^2 - Bh. \qquad \text{(a)}$$

Если начальные условия таковы, что постоянные интегрирования K^2 и h имеют значения, удовлетворяющие условию

$$K^2 - Bh = 0,$$

то из (a) находим

$$p = \alpha r, \qquad \text{(b)}$$

где

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}.$$

При этом для вещественности α необходимо, чтобы B был средним по численному значению из трех главных моментов инерции. Подставляя значение p в интеграл энергии (2), имеем:

$$(A\alpha^2 + C)r^2 + Bq^2 = h.$$

Решая это уравнение относительно q, находим

$$q = \pm \sqrt{\frac{h - (A\alpha^2 + C)r^2}{B}},$$

что при обозначениях

$$\beta = \sqrt{\frac{A\alpha^2 + C}{B}}, \qquad \kappa^2 = \frac{h}{A\alpha^2 + C}$$

можно записать в виде

$$q = \pm \beta \sqrt{\kappa^2 - r^2}. \qquad \text{(c)}$$

Подставим выражения (b) и (c) в третье уравнение Эйлера (1) и после деления его на C положим

$$\frac{A-B}{C}\alpha\beta = \gamma;$$

тогда будем иметь

$$\frac{dr}{dt} = \pm \gamma r \sqrt{\kappa^2 - r^2}.$$

Делая замену переменных

$$r = \kappa \sin u, \qquad \frac{dr}{dt} = \kappa \cos u \frac{du}{dt},$$

приводим последнее уравнение к виду

$$\frac{du}{dt} = \pm \kappa\gamma \sin u$$

или

$$\frac{du}{\sin u} = \pm \kappa\gamma dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \pm \kappa\gamma t + \ln c,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = ce^{\pm \kappa\gamma t},$$

где c есть постоянная интегрирования. По полученному значению u можно найти простые выражения для p, q, r как функций времени t.

3. Случай Эйлера. Пусть вращающееся по инерции тело таково, что эллипсоид инерции для неподвижной точки есть эллипсоид вращения, например, $A = B$. В таком случае третье уравнение (1) доставляет интеграл

$$r = n = \text{const}. \tag{4}$$

Теперь легко можно найти углы Эйлера как функции времени. С этой целью ось ζ неподвижной системы координат направим по постоянному вектору кинетического момента $\boldsymbol{K}$. Тогда проекции кинетического момента на подвижные оси координат будут

$$K_x = K\gamma_1, \quad K_y = K\gamma_2, \quad K_z = K\gamma_3$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ, определяемые через углы Эйлера формулами (39—11) и (39—12). Используя эти формулы и принимая во внимание выражения (39—8), приходим к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} K \sin\theta \sin\varphi &= Ap; \\ K \sin\theta \cos\varphi &= Aq; \\ K \cos\theta &= Cr. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Из последнего равенства согласно (4) имеем

$$\cos\theta = \frac{Cn}{K} = \text{const}, \tag{b}$$

откуда

$$\theta = \theta_0 = \text{const}.$$

Так как отсюда следует, что $\dot{\theta} = 0$, то кинематические уравнения Эйлера (39—13) принимают вид;

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi; \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi; \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Подставляя значения p и q в первые два равенства (a), получаем после сокращений одно и то же соотношение

$$K = A\dot{\psi}$$

откуда

$$\dot{\psi} = \frac{K}{A} = n_1 = \text{const}. \qquad (d)$$

Последнее выражение (c) дает

$$n = n_1\cos\theta_0 + \dot{\varphi},$$

следовательно,

$$\dot{\varphi} = n - n_1\cos\theta_0 = n_2 = \text{const}. \qquad (e)$$

Интегрируя полученные выражения для $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$, получаем закон вращательного движения тела:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0, \\ \psi &= n_1 t + \psi_0, \\ \varphi &= n_2 t = \varphi_0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Так как угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ остается постоянной во все время движения, а угловая скорость нутации $\dot{\theta}$ равна нулю, то движение по полученному закону называется *регулярной прецессией* или *прецессией без нутации*.

Нетрудно установить, что постоянные, входящие в формулы (5), связаны одним условием. Из (e) имеем

$$n = n_1\cos\theta_0 + n_2,$$

а из (b) и (d)

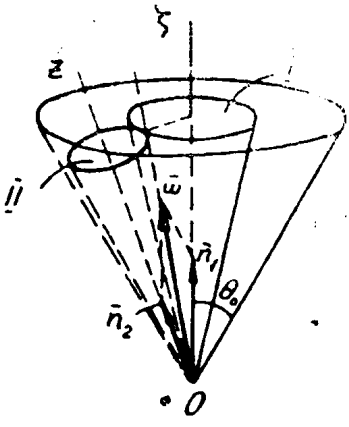
$$n = \frac{K}{C}\cos\theta_0 = \frac{A}{C}n_1\cos\theta_0.$$

Приравнивая эти два значения n, после умножения на C приходим к соотношению

$$(A - C)n_1\cos\theta_0 - Cn_2 = 0.$$

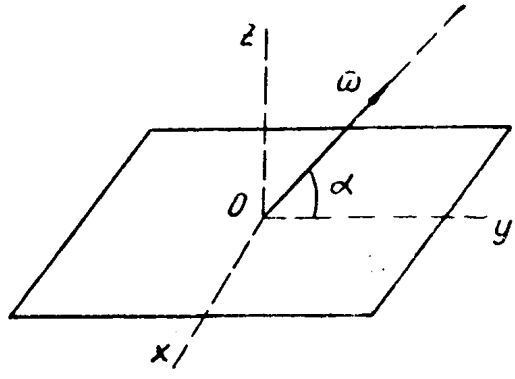
Следовательно, из пяти постоянных θ_0, n_1, n_2, ψ_0, φ_0, входящих в (5), независимых будет только четыре. Поэтому для полного определения закона движения тела необходимо иметь четыре начальных условия.

Рассмотрим геометрическую картину регулярной прецессии (фиг. 164). Пусть O — неподвижная точка тела. Ось z собственного вращения, вращаясь вокруг оси прецессии ζ с постоянной угловой скоростью n_1, описывает вокруг нее круговой конус с полууглом раствора θ_0. Тело, кроме того, вращается тоже с постоянной угловой скоростью n_2 вокруг оси z. Полная мгновенная угловая скорость тела ω найдется как диагональ параллелограмма, построенного на векторах n_1 и n_2. Этот параллелограмм вращается в неизменном виде вокруг оси ζ, при этом мгновенная ось вращения, на которой располагается вектор ω, опишет вокруг этой оси круговой конус I, являющийся неподвижным аксоидом мгновенных осей вращения. В то же время в пространстве, связанном с вращающимся телом, мгновенная ось вращения опишет вокруг оси z круговой конус II, ибо угол между этими осями остается неизменным во все время движения. Конус II будет подвижным аксоидом мгновенных осей вращения, который при движении тела будет катиться без скольжения по неподвижному аксоиду.



Фиг. 164

Пример. Однородная квадратная пластинка может вращаться по инерции вокруг своего центра (фиг 165). В начальный момент пластинке



Фиг. 165

сообщена угловая скорость ω вокруг оси, составляющей угол α с плоскостью пластинки. Найти угловую скорость прецессии.

Оси симметрии пластинки являются главными осями инерции для точки O. Принимая их за оси координат, беря ось z перпендикулярно

плоскости пластинки, имеем для главных моментов инерции равенство $A = B$. В этих условиях пластинка будет вращаться вокруг O по закону регулярной прецессии, и угловая скорость прецессии найдется по формуле

$$\dot{\psi} = \frac{K}{A},$$

где K — кинетический момент.

Так как эллипсоид инерции для точки O есть эллипсоид вращения, то любая ось, лежащая в плоскости пластинки, есть главная ось инерции с отвечающим ей одним и тем же моментом инерции A. Следовательно, вследствие постоянства K, прецессия $\dot{\psi}$ имеет значение, не зависящее от расположения вектора ω относительно системы координат. Можем поэтому принять, например, что вектор ω расположен в плоскости (yz). Тогда для проекций вектора K получим

$$K_x = Ap = 0, \quad K_y = Aq = A\omega\cos\alpha, \quad K_z = Cr = C\omega\sin\alpha,$$

откуда имеем

$$K = \omega\sqrt{A^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha}.$$

Вычисляя моменты инерции, найдем, что $A = \frac{1}{3}Ma^2$, $C = \frac{2}{3}Ma^2$, то есть $C = 2A$. Поэтому

$$K = A\omega\sqrt{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} = A\omega\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}.$$

Отсюда получаем для угловой скорости прецессии значение

$$\dot{\psi} = \omega\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}.$$

4. Геометрическая интерпретация Пуансо. Пуансо дал наглядную геометрическую интерпретацию общего случая вращения твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки.

Рассмотрим семейство плоскостей, перпендикулярных постоянному вектору K кинетического момента. Возьмем уравнение семейства этих параллельных плоскостей в нормальной форме

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = d,$$

где d — параметр семейства, равный расстоянию какой-либо плоскости от начала координат, α, β, γ — направляющие углы перпендикуляра к плоскостям, x', y', z' — текущие координаты точек плоскости. В нашем случае

$$\cos\alpha = \frac{K_x}{K} = \frac{Ap}{K}, \quad \cos\beta = \frac{Bq}{K}, \quad \cos\gamma = \frac{Cr}{K},$$

поэтому уравнение семейства будет

$$\frac{Ap}{K}x' + \frac{Bq}{K}y' + \frac{Cr}{K}z' = d. \qquad (a)$$

Выберем теперь из этого семейства плоскость, касательную к эллипсоиду инерции для неподвижной точки тела

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \qquad (6)$$

Уравнение касательной плоскости к эллипсоиду в точке (x, y, z) есть

$$Axx' + Byy' + Czz' = 1,$$

где x', y', z' — текущие координаты. Совпадение этой плоскости с одной из плоскостей семейства (a) требует пропорциональности всех коэффициентов, включая и свободный член, что дает условия

$$\frac{p}{Kx} = \frac{q}{Ky} = \frac{r}{Kz} = \frac{d}{1}. \qquad \text{(b)}$$

Полученные условия говорят о пропорциональности проекций мгновенной угловой скорости ω координатам точки касания, откуда вытекает, что мгновенная ось вращения направлена по радиусу-вектору ρ точки касания.

Возвысим все члены пропорции (b) в квадрат, затем умножим числители и знаменатели первого отношения на A, второго—на B, третьего на C; получим:

$$\frac{Ap^2}{AK^2x^2} = \frac{Bq^2}{BK^2y^2} = \frac{Cr^2}{CK^2z^2} = d^2.$$

Отсюда находим производную пропорцию

$$\frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{K^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2)} = d^2,$$

которая, согласно (2) и (6), дает

$$d^2 = \frac{h}{K^2},$$

откуда

$$d = \frac{\sqrt{h}}{K} = \text{const}. \qquad \text{(c)}$$

Следовательно, во все время движения тела эллипсоид инерции будет касаться одной и той же плоскости, называемой *неизменяемой плоскостью Пуансо*.

Возвышая снова члены пропорции (b) в квадрат, можем составить производную пропорцию

$$\frac{p^2 + q^2 + r^2}{K^2(x^2 + y^2 + z^2)} = d^2$$

или

$$\frac{\omega^2}{K^2\rho^2} = d^2,$$

что с учетом (c) дает

$$\omega = \rho\sqrt{h}; \qquad (d)$$

это говорит о том, что между модулями вектора угловой скорости и радиуса-вектора точки касания имеется прямая пропорциональность.

Учитывая еще, что точка эллипсоида инерции, находящаяся в данный момент в точке касания с плоскостью Пуансо, не имеет скорости, как лежащая на мгновенной оси вращения можем дать следующую интерпретацию рассматриваемого движения тела:

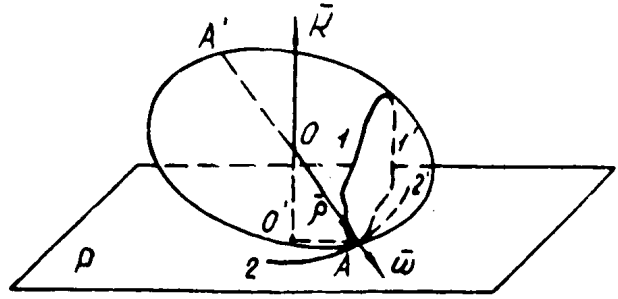
Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции для неподвижной точки тела по неизменяемой плоскости Пуансо, перпендикулярной кинетическому моменту и отстоящему от неподвижной точки на расстоянии

$$d = \frac{\sqrt{h}}{K}.$$

Мгновенная ось вращения тела в каждый момент движения располагается по радиусу-вектору точки касания эллипсоида с плоскостью, а модуль мгновенной угловой скорости пропорционален модулю указанного радиуса-вектора и определяется формулой

$$\omega = \rho\sqrt{h}.$$

Сказанное можно проиллюстрировать чертежом (фиг. 166), где O—неподвижная точка тела, P—плоскость Пуансо, A—точка касания эллипсоида инерции с плоскостью P.



Фиг. 166

Заметим, что плоскость Пуансо может быть построена как с одной стороны эллипсоида инерции, так и с другой; поэтому вместо плоскости P можно взять параллельную ей плоскость P', расположенную по другую сторону от точки O на том же расстоянии d и касающуюся эллипсоида инерции в точке A', лежащей на продолжении отрезка AO.

Так как h и K являются постоянными интегрирования, входящими в интегралы (2) и (3), то положение плоскости Пуансо определяется начальными условиями движения.

Перекатываясь по плоскости Пуансо, эллипсоид инерции будет касаться этой плоскости все новыми и новыми своими точками до тех пор, пока не коснется снова той же точкой A. Это означает, что на поверхности эллипсоида точка касания опишет некоторую замкнутую кривую $11'$, называемую *полодией*. На плоскости Пуансо точка касания также будет непрерывно менять свое положение, описывая кривую $22'$, называемую *герполодией*.

5. Уравнения полодии и ее вид. Так как полодия всеми своими точками лежит на эллипсоиде инерции, то одним ее уравнением является уравнение (6) этого эллипсоида. Для получения другого уравнения возьмем уравнение плоскости Пуансо, как касательной к эллипсоиду, в виде

$$Axx' + Byy' + Czz' = 1.$$

Приведение этого уравнения к нормальному виду дает для расстояния плоскости от начала координат

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}},$$

откуда имеем

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{1}{d^2}. \qquad (a)$$

Это равенство дает второе уравнение полодии, являющееся уравнением некоторого другого эллипсоида, пересечением которого с эллипсоидом инерции и является полодия.

Для исследования вида полодии удобнее взамен уравнения (а) взять другое уравнение. Вводя обозначение

$$D = \frac{1}{d^2}, \qquad (b)$$

умножим уравнение (6) на D и вычтем результат из (а), тогда получим

$$A(A - D)x^2 + B(B - D)y^2 + C(C - D)z^2 = 0. \qquad (7)$$

Это есть уравнение конуса с вершиной в начале координат. Так как образующая этого конуса, проходящая через точку касания эллипсоида инерции с плоскостью Пуансо, является мгновенной осью вращения для данного момента времени, то конус (7) является подвижным аксоидом мгновенных осей вращения. В пересечении с эллипсоидом инерции конус дает полодию, поэтому он называется еще *конусом полодий*.

Предположим для определенности, что моменты инерции находятся в соотношении

$$A > B > C.$$

Тогда для вещественности конуса (7) необходимо выполнение условия

$$A \geqslant D \geqslant C. \qquad (c)$$

Рассмотрим сначала частные случаи.

a. $D = A$. Уравнение конуса (7) переходит в уравнение

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = 0,$$

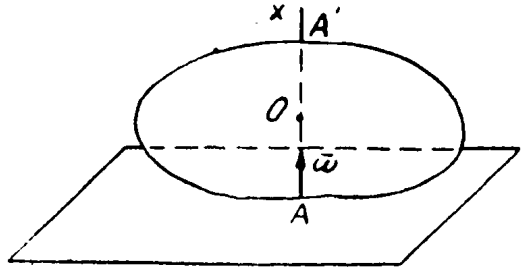
откуда

$$z = \pm \sqrt{-\frac{B(B-A)}{C(C-A)}}\, y.$$

Так как $B < A$, $C < A$, то выражение под корнем меньше нуля. Следовательно, конус полодий распадается на пару мнимых плоскостей. Однако полученному уравнению удовлетворяют вещественные значения координат $y = 0$, $z = 0$. Это означает, что в данном случае конус (7) вырождается в прямую—ось x. Так как для соответствующей полуоси эллипсоида инерции имеем

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

то a является наименьшей полуосью эллипсоида. Полодия будет представлена вершинами A и A' эллипсоида инерции (фиг 167); вместо качения будет иметь место верчение эл-



Фиг. 167

липсоида на плоскости Пуансо, причем согласно равенству $\omega = \rho\sqrt{h}$, в силу $\rho = OA = \text{const}$, будет $\omega = \text{const}$. Таким образом, в данном случае будем иметь вращение тела вокруг оси наибольшего главного момента инерции с постоянной угловой скоростью.

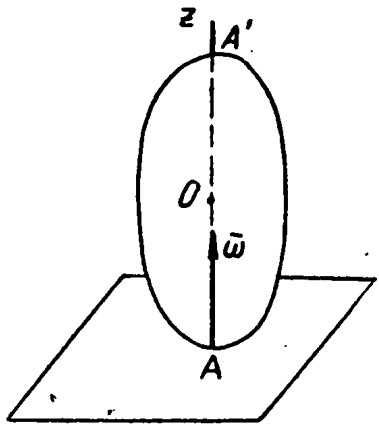
b. $D = C$. В уравнении (7) исчезает последний член, и конус полодий распадается на пару мнимых плоскостей:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}\, y.$$

Эти уравнения удовлетворяются вещественными значениями $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, конус полодий вырождается в этом случае в ось z, располагающуюся согласно равенству

$$c = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

по наибольшей оси эллипсоида инерции. Полодия представится вершинами A, A', расположенными на этой оси (фиг. 168); снова будем иметь верчение эллипсоида, и угловая скорость опять окажется постоянной. Тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью вокруг оси наименьшего главного момента инерции.



Фиг. 168

c. $D = B$. В уравнении (7) исчезает средний член, и конус распадается на пару плоскостей

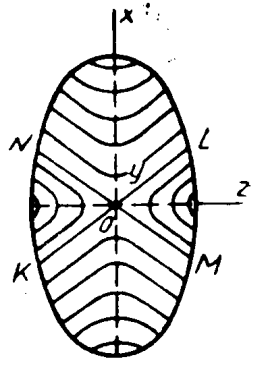
$$x = \pm \sqrt{-\frac{C(C-B)}{A(A-B)}}\, z.$$

Так как $C < B$, $A > B$, то эти плоскости будут вещественными, пересекающимися по оси y и симметрично расположенными относительно координатных плоскостей (yz) и (xy). Полодия окажется в данном случае двумя эллипсами, по которым плоскости пересекаются с эллипсоидом инерции. Если в начальный момент мгновенная ось вращения располагалась по средней полуоси эллипсоида, то есть по оси y, то последующее движение тоже окажется вращением тела вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью.

Мы снова пришли к тому же результату, что и в § 40, п. 3, показав, что главные оси инерции для неподвижной точки тела являются постоянными осями вращения, вокруг которых при отсутствии внешних активных сил тело вращается с постоянной угловой скоростью.

В промежуточных случаях, когда $A > D > B$ и $B > D > C$, полодия будет состоять из двух замкнутых кривых, окружающих вершины эллипсоида инерции, лежащие на осях

наибольшего или наименьшего моментов инерциии. При изменении D от A к B и от C к B эти ветви все более приближаются к указанным выше эллипсам, переходя при $D = B$ в ограничивающие соответствующие области половины эллипсов. Сказанное можно проиллюстрировать чертежом (фиг. 169), представляющим проекцию семейства полодий на плоскость (xz), где прямые KL и MN представляют собой следы эллипсов, получающихся при $D = B$.



Фиг. 169

В заключение укажем на простой геометрический смысл условия (c). С учетом (b) его можно переписать в виде

$$\frac{1}{a^2} \geqslant \frac{1}{d^2} \geqslant \frac{1}{c^2},$$

откуда

$$c \geqslant d \geqslant a,$$

то есть плоскость Пуансо должна отстоять от неподвижной точки тела на расстоянии, не меньшем наименьшей и не большим наибольшей полуоси. Невозможность других значений d видна из того, что при $d < a$ плоскость Пуансо обязательно пересекала бы эллипсоид инерции, а при $d > c$ она проходила бы вне эллипсоида; в обоих случаях касание эллипсоида инерции с плоскостью Пуансо было бы невозможным.

6. Герполодия. Пусть O' — основание перпендикуляра, опущенного из неподвижной точки на плоскость Пуансо (фиг 166). Так как $d = OO'$, то для величины радиуса-вектора точек герполодии $\rho' = O'A$ имеем

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 - d^2}.$$

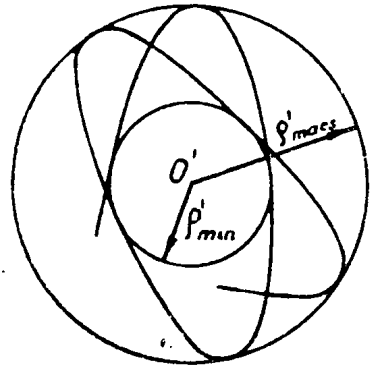
При движении эллипсоида инерции ρ принимает некоторый минимум ρ_{min} и максимум ρ_{max}; следовательно, ρ' будет изменяться от $\rho'_{min} = \sqrt{\rho^2_{min} - d^2}$ до $\rho'_{max} = \sqrt{\rho^2_{max} - d^2}$, и герполодия будет находиться на плоскости Пуансо внутри кольца, ограниченного окружностями с этими радиусами (фиг. 170).

Укажем без доказательства, что герполодия в общем случае является незамкнутой кривой, касающейся граничных окружностей кольца и всюду обращенной вогнутостью к точке O'.

7. Устойчивость вращения около главных осей инерции. Какое-либо движение называется устойчивым, если при достаточно малом произвольном отклонении от него в какой-либо момент времени последующее

движение будет отклоняться от первоначального в границах, которые выбором начального отклонения могут быть сделаны сколь угодно узкими. Если же при произвольно малом начальном отклонении последующее движение будет неограниченно отклоняться от первоначального, то невозмущенное движение называется неустойчивым.

Установленный выше вид семейства полодий позволяет решить вопрос об устойчивости вращения твердого тела по инерции вокруг главных осей инерции для неподвижной точки тела.



Фиг. 170

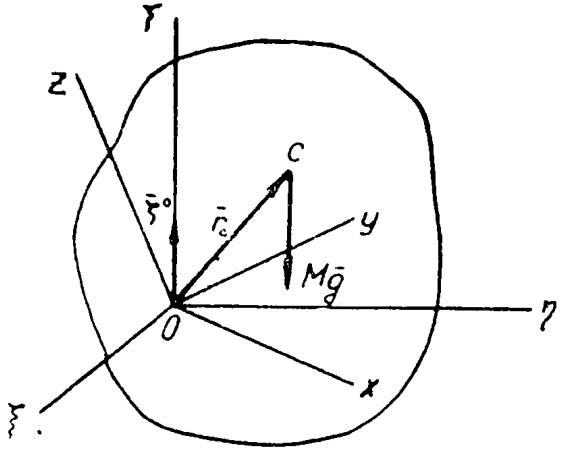
Так, при вращении тела вокруг оси наибольшего или наименьшего из главных моментов инерции при малом отклонении мгновенной оси вращения эллипсоид инерции начнет катиться по плоскости Пуансо, касаясь ее точками малой полодии, окружающей соответствующую вершину эллипсоида. При этом, чем меньше будет взято начальное отклонение оси, тем полодия будет меньше, то есть будет меньше последующее отклонение оси вращения от главной оси инерции. Следовательно, вращение твердого тела по инерции вокруг оси наибольшего или наименьшего моментов инерции будет устойчивым.

Если же вращение тела происходит вокруг оси среднего из главных моментов инерции, то есть вокруг оси y на фиг 169, то при любом сколь угодно малом отклонении мгновенной оси вращения последующее движение тела будет таково, что эллипсоид инерции начнет катиться по плоскости Пуансо, касаясь ее точками полодии, весьма близкой к двум половинам эллипсов KL и MN. Следовательно, мгновенная ось вращения в последующем возмущенном движении начнет неограниченно отклоняться от своего первоначального положения; отсюда вытекает, что вращение твердого тела по инерции вокруг оси среднего из главных моментов инерции является неустойчивым.

§ 43. Вращение тяжелого твердого тела около неподвижной точки

1. Общая постановка задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Примем неподвижную точку тела O за общее начало неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ и подвижной

$Oxyz$, направляя ось ζ вертикально вверх (фиг 171). В центре тяжести тела C, определяемом радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_c(x_c, y_c, z_c)$, приложена сила тяжести тела $M\boldsymbol{g}$, направленная вертикально вниз, то есть противоположна оси ζ. Если ζ° — орт оси ζ, то сила тяжести будет $M\boldsymbol{g} = -Mg\zeta^\circ$, а ее



Фиг. 171

момент относительно неподвижной точки, являющийся главным моментом внешних сил, есть

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_c \times M\boldsymbol{g} = -Mg\,\boldsymbol{r}_c \times \zeta^0 = Mg\zeta^0 \times \boldsymbol{r}_c.$$

Проекциями орта ζ° на подвижные оси координат являются направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 оси ζ относительно этих осей. Поэтому

$$\boldsymbol{L} = Mg \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{\kappa} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Следовательно, динамические уравнения Эйлера для данной задачи примут вид:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr &= Mg(z_c\gamma_2 - y_c\gamma_3); \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp &= Mg(x_c\gamma_3 - z_c\gamma_1); \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq &= Mg(y_c\gamma_1 - x_c\gamma_2). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Так как γ_1, γ_2, γ_3, как и p, q, r, являются функциями времени, то для возможности решения задачи необходимо иметь еще три уравнения. Эти уравнения найдутся из постоянства орта ζ°. В самом деле, рассматривая вектор ζ° в подвижной системе отсчета и выражая равенство

$$\frac{d\zeta^0}{dt} = 0$$

с помощью локальной производной, имеем:

$$\frac{\tilde{d}\zeta^0}{dt} + \omega \times \zeta^0 = 0$$

или

$$\frac{\tilde{d}\zeta^\circ}{dt} = \zeta^0 \times \omega = \begin{vmatrix} i & j & \kappa \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}.$$

Проектируя это равенство на оси x, y, z, приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3; \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1; \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения (1), (2) представляют собой систему шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести функций времени p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3. Найдя шесть независимых интегралов этой системы и пользуясь выражениями (39—11), (39—12) для γ_1, γ_2, γ_3, а также кинематическими уравнениями Эйлера (39—13), можем найти углы Эйлера как функции времени, то есть найти закон вращательного движения твердого тела.

Рассмотрим вопрос об определении интегралов системы (1), (2). Эту систему можно переписать в канонической форме:

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \frac{d\gamma_3}{\Gamma_3} = dt, \qquad (a)$$

где

$$P = \frac{1}{A}\{Mg(z_c\gamma_2 - y_c\gamma_3) - (C - B)qr\};$$

$$Q = \frac{1}{B}\{Mg(x_c\gamma_3 - z_c\gamma_1) - (A - C)rp\};$$

$$R = \frac{1}{C}\{Mg(y_c\gamma_1 - x_c\gamma_2) - (B - A)pq\}; \qquad (b)$$

$$\Gamma_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \Gamma_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \Gamma_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

Видим, что все знаменатели в уравнениях (a) не зависят явно от t, поэтому достаточно найти лишь пять интегралов первых пяти уравнений (a), после чего шестой интеграл, дающий связь искомых функций со временем, найдется простой квадратурой из равенства dt любому из первых отношений (a).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что для канонической системы $n - 1$ уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

часто бывает достаточно найти лишь $n - 2$ независимых интеграла $f_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n - 2)$, последний же $(n - 1)$-й интеграл может быть найден с помощью так называемого последнего множителя Якоби. Именно, разрешая полученные интегралы относительно, например, первых $x_\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots, n - 2)$ и подставляя их значения в коэффициенты последнего уравнения

$$X_n dx_{n-1} - X_{n-1} dx_n = 0,$$

получим уравнение, связывающее только переменные x_{n-1}, x_n. Интегрирующий множитель этого уравнения, если он существует, и называется последним множителем Якоби. Этот множитель, удовлетворяющий некоторому дифференциальному уравнению, может быть найден заранее, до интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений. В частности, если знаменатели уравнений удовлетворяют условию

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial X_\kappa}{\partial x_\kappa} = 0, \qquad (c)$$

то множитель Якоби оказывается постоянным и, следовательно, последнее уравнение будет обязательно интегрироваться без всякого умножения на какой-либо множитель.

В нашем случае согласно выражениям (b) каждый знаменатель не зависит от той переменной, дифференциал который стоит в числителе, поэтому условие (c) будет выполняться тождественно. Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно найти лишь четыре интеграла уравнений (1), (2).

Направляющие косинусы оси ζ связаны соотношением

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \qquad (3)$$

Это равенство можно рассматривать как один из интегралов нашей системы. Его можно получить из системы (2): умножая первое уравнение на γ_1, второе — на γ_2, третье — на γ_3 и складывая, приходим к уравнению

$$\gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = 0,$$

интегралом которого и является равенство (3). Интеграл (3), как не содержащий произвольной постоянной, получил название *тривиального*.

Остается найти еще три интеграла.

Умножим первое уравнение (1) на γ_1, второе на γ_2, третье на γ_3 и сложим; в результате, собирая члены с одинаковыми моментами инерции, получим:

$$A\left\{\gamma_1 \frac{dp}{dt} + p(r\gamma_2 - q\gamma_3)\right\} + B\left\{\gamma_2 \frac{dq}{dt} + q(p\gamma_3 - r\gamma_1)\right\} +$$

$$+ C\left\{\gamma_3 \frac{dr}{dt} + r(q\gamma_1 - p\gamma_2)\right\} = 0.$$

Выражения в круглых скобках равны правым частям соответствующих уравнений (2), поэтому полученное уравнение переписывается в виде

$$A\left(\gamma_1 \frac{dp}{dt} + p\frac{d\gamma_1}{dt}\right) + B\left(\gamma_2 \frac{dq}{dt} + q\frac{d\gamma_2}{dt}\right) + C\left(\gamma_3 \frac{dr}{dt} + r\frac{d\gamma_3}{dt}\right) = 0,$$

что после интегрирования дает

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = c, \qquad (4)$$

где c — постоянная интегрирования. Этот интеграл можно получить иначе, пользуясь теоремой моментов. В самом деле, момент внешних сил L_ζ относительно оси ζ равен нулю, следовательно,

$$\frac{dK_\zeta}{dt} = L_\zeta = 0,$$

откуда

$$K_\zeta = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\zeta}^0 = c,$$

что совпадает с интегралом (4). Поэтому интеграл (4) называется *интегралом моментов*.

Умножая далее первое уравнение (1) на p, второе на q, третье на r и складывая, получим

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = Mg\{x_c(q\gamma_3 - r\gamma_2) + y_c(r\gamma_1 - p\gamma_3) +$$

$$+ z_c(p\gamma_2 - q\gamma_1)\},$$

что с помощью уравнения (2) можно записать в виде

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=-Mg\left(x_c\frac{d\gamma_1}{dt}+y_c\frac{d\gamma_2}{dt}+z_c\frac{d\gamma_3}{dt}\right).$$

Интегрирование дает

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=-2Mg\left(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2+z_c\gamma_3\right)+h, \qquad (5)$$

где h — постоянная интегрирования. Это равенство представляет собой *интеграл энергии*, ибо в левой части стоит удвоенная кинетическая энергия тела, а

$$-Mg\left(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2+z_c\gamma_3\right)=-Mg\left(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{\gamma}^0\right)=-Mg\zeta_c$$

есть потенциал силы тяжести.

Таким образом, остается найти еще один единственный интеграл. В отыскании этого последнего интеграла и состоит сущность каждой задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Полученные три интеграла (3), (4), (5) носят алгебраический характер, поэтому задача об отыскании недостающего интеграла была сформулирована как задача об установлении тех случаев движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, в которых существует четвертый алгебраический интеграл.

Впервые эта задача была решена нашей соотечественницей С. В. Ковалевской в 1889 г., которая показала, что четвертый алгебраический интеграл существует только в трех случаях.

1. Случай Эйлера — Пуансо или случай вращения по инерции, рассмотренный выше. Для тяжелого твердого тела этот случай имеет место тогда, когда тело свободно или когда центр масс совпадает с неподвижной точкой тела.

2. Случай Лагранжа-Пуассона, при котором эллипсоид инерции для неподвижной точки есть эллипсоид вращения, например, $A=B$, а центр тяжести тела лежит на оси неравного момента инерции.

3. Случай, установленный самой Ковалевской и носящий ее имя. В этом случае эллипсоид инерции для неподвижной точки является эллипсоидом вращения с соотношениями для главных моментов инерции $A=B=2C$, а центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (плоскости равных моментов инерции).

В дальнейшем исследования Ковалевской были продолжены другими учеными. Было показано, что даже без тех ограничений на искомые функции, которые вводились Ковалевской, четвертый алгебраический интеграл не существует ни в каких других случаях, кроме указанных трех.

Однако некоторыми исследователями, главным образом — русскими, были установлены другие случаи интегрируемос-

ти уравнений (1), (2), в которых не только налагаются некоторые условия на движущееся тело, но и выбирается определенным образом часть начальных данных. Такими случаями оказались случаи Гесса, Горячева, Бобылева-Стеклова, Чаплыгина и некоторые другие.

2. Случай Лагранжа-Пуассона. Интегралы движения. Как уже сказано, в этом случае эллипсоид инерции для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а центр тяжести тела лежит на оси неравного момента инерции, не совпадая с неподвижной точкой тела. Данный случай имеет большое практическое значение, причем обычно твердое тело выполняется в форме некоторого тела вращения, называемого симметричным волчком. Примем для определенности $A = B$, тогда $x_c = y_c = 0$, $z_c \neq 0$. Считая ось z направленной от неподвижной точки к центру тяжести, будем всегда считать $z_c > 0$.

Так как сила тяжести приложена в точке оси z, то $L_z = 0$ и третье уравнение (1), с учетом значений постоянных параметров, примет вид

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Отсюда находим недостающий интеграл

$$r = n = \text{const}. \tag{6}$$

Интегралы (4) и (5) запишутся в данном случае в виде

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cn\gamma_3 = c,$$

$$A(p^2 + q^2) + Cn^2 = -2Mgz_c\gamma_3 + h.$$

Подставляя сюда значения p, q, r из кинематических уравнений Эйлера (39—13), а также выражения (39—11) и (39—12) для γ_1, γ_2, γ_3, получим

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cn\cos\theta = c, \tag{a}$$

$$A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + Cn^2 = -2Mgz_c\cos\theta + h. \tag{b}$$

Кроме того, подставляя в (6) значение r из (39—13), имеем

$$\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = n. \tag{c}$$

Из (а) находим

$$\dot{\psi} = \frac{c - Cn\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \tag{7}$$

а из (с) с учетом (7) получаем

$$\dot{\varphi} = n - \frac{c - Cn\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta. \tag{8}$$

Отсюда следует, что, найдя угол $\theta = \theta(t)$, мы затем квадратурами найдем и углы ψ, φ как функции времени.

Дифференциальное уравнение для угла θ найдется, если подставить $\dot{\psi}$ из (7) в (b). Делая это, придем к уравнению

$$A\dot{\theta}^2 = -\frac{(c - Cn\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2Mgz_c\cos\theta + h - Cn^2.$$

Освобождаясь от знаменателя, имеем

$$A^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = -(c - Cn\cos\theta)^2 - 2AMgz_c\sin^2\theta\cos\theta + \\ + A(h - Cn^2)\sin^2\theta.$$

Вводим новую функцию

$$u = \cos\theta, \quad \dot{u} = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}.$$

Предыдущее уравнение примет вид:

$$A^2\dot{u}^2 = f(u)$$

или

$$A\dot{u} = \pm\sqrt{f(u)}, \tag{9}$$

где

$$f(u) = -(c - Cnu)^2 - 2AMgz_cu(1 - u^2) + \\ + A(h - Cn^2)(1 - u^2), \tag{10}$$

а знак берется в соответствии с тем, возрастает или убывает функция $u(t)$ на данном промежутке времени. Разделяя переменные, имеем

$$dt = A\frac{du}{\pm\sqrt{f(u)}},$$

что после интегрирования от 0 до t дает

$$t = A\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\pm\sqrt{f(u)}}. \tag{d}$$

Так как $f(u)$ есть полином третьей степени относительно u, то в правой части (d) стоит эллиптический интеграл первого рода. Следовательно, обращая равенство (d), найдем u как эллиптическую функцию времени. Тем самым определится угол $\theta = \arccos u$, а затем из (7) и (8) найдутся и остальные углы Эйлера.

Нужно, однако, заметить, что изложенное дает только принципиальную схему решения задачи о вращении симметрического волчка. В действительности же указанный процесс весьма сложен и не дает возможности получения решения в замкнутой форме. Поэтому здесь обычно пользуются различными приближенными методами.

3. Геометрическая характеристика движения симметрического волчка. Рассмотрим расположение корней функции $f(u)$. Из (10) находим:

$$f(-1) = -(c + Cn)^2 \leqslant 0,\ f(+1) = -(c - Cn)^2 \leqslant 0,$$
$$f(\infty) = +\infty > 0.$$

Следовательно, по крайней мере один корень находится в промежутке от $+1$ до $+\infty$. А так как u, как косинус, может в действительности иметь значения, для которых $|u| \leqslant 1$, и для этих значений, согласно (9), должно быть $f(u) \geqslant 0$, то функция $f(u)$ в промежутке значений u от -1 до $+1$ должна дважды менять знак. Поэтому, нумеруя корни в порядке их возрастания, найдем, что они должны удовлетворять неравенству

$$-1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant 1 < u_3;$$

при этом корень u_3 не имеет физического смысла, а истинному движению отвечают значения u, заключенные между u_1 и u_2.

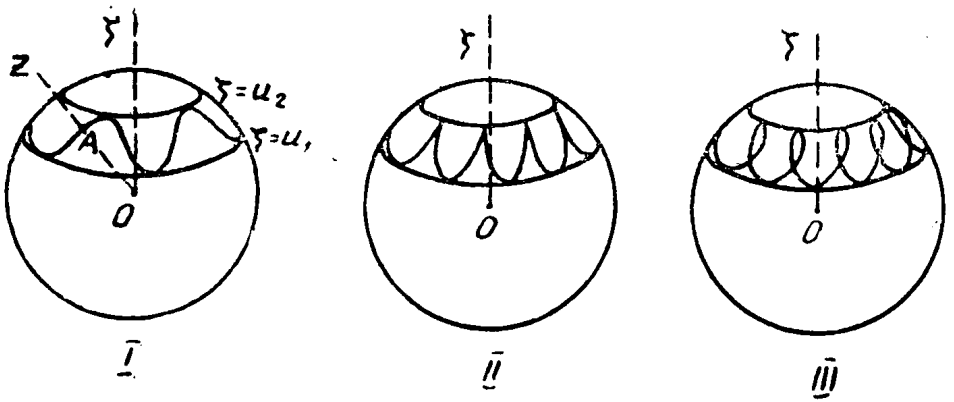
Возьмем сферу единичного радиуса с центром в неподвижной точке тела. Тогда конец A орта оси z при движении тела будет описывать на этой сфере кривую, координаты точек которой по оси прецессии ζ будут равны $\cos\theta = u$. Следовательно, вся кривая окажется заключенной в поясе, ограниченном параллелями $\zeta = u_1$ и $\zeta = u_2$. Вследствие периодичности эллиптических функций эта кривая будет состоять из периодически повторяющихся витков. Покажем, что в зависимости от того, сохраняет ли угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ знак во все время движения или нет, кривая будет иметь один из видов, указанных на фиг. 172.

С этой целью рассмотрим движение точки A по сфере в сферических координатах $r = 1$, θ, ψ. Координатной линией θ будет меридиан данного места поверхности сферы, а линией ψ — параллель места. Пользуясь формулами кинематики (6—11) для проекций скорости на оси криволинейных координат $v_\nu = H_\nu \dot{q}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) и учитывая, что коэффициенты Лямэ в данном случае будут $H_\theta = r = 1$, $H_\psi = r\sin\theta = \sin\theta$, найдем для проекций скорости на оси (θ) и (ψ)

$$v_\theta = \dot{\theta},\ v_\psi = \sin\theta \cdot \dot{\psi}. \qquad \text{(а)}$$

Сам вектор скорости будет касателен к траектории точки A (фиг. 173); отрезок этой траектории обозначен через BC.

Допустим сначала, что $\dot{\psi}$ сохраняет знак, не обращаясь в нуль ни в один момент времени; для определенности возьмем $\dot{\psi} > 0$. Тогда всюду $v_\psi > 0$; а так как на крайних



Фиг. 172

параллелях $\dot{\Theta} = 0$, то есть $v_\Theta = 0$, то вектор скорости точки A касателен к каждой параллели, и, следовательно, траектория этой точки тоже будет касаться этих параллелей. Поэтому она имеет вид I.

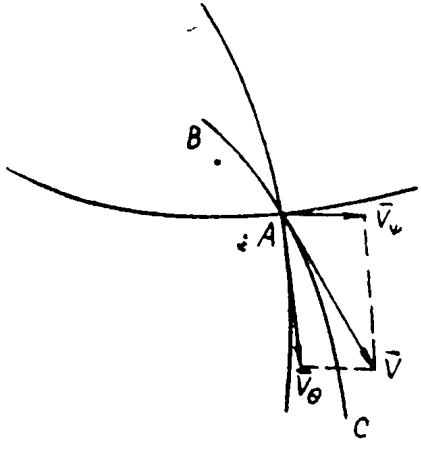
Рассмотрим другой случай, когда $\dot{\psi} \geqslant 0$, то есть $\dot{\psi}$ сохраняет знак, но в отдельные моменты времени обращается в нуль. Так как

$$\dot{\psi} = \frac{c - Cn\cos\Theta}{A\sin^2\Theta} = \frac{c - Cnu}{A(1-u^2)}, \qquad \text{(b)}$$

то обращение $\dot{\psi}$ в нуль может иметь место только при $u = u_1$ или $u = u_2$, ибо, если бы это случилось внутри пояса, то при дальнейшем изменении u разность $c - Cnu$, а следовательно и $\dot{\psi}$ изменила бы знак. Покажем, что это возможно только при $u = u_2$. В самом деле, значение

$$u' = \frac{c}{Cn},$$

при котором $\dot{\psi} = 0$, является одним из корней функции $f(u)$; при всех же значениях $u \neq u'$ $\dot{\psi}$ больше нуля и поэтому для них $c - Cnu > 0$, что дает $u < u'$. Поэтому значение u' является наибольшим из всех возможных и, следовательно, оно равно u_2.



Фиг. 173

Отсюда вытекает, что в точках верхней параллели в этом случае, согласно (a), равны нулю обе составляющие скорости. Поэтому для оценки характера движения точки A у верхней параллели обратимся к проекциям ускорения на те же оси сферических координат. Беря формулу (7—12) из первой части книги для проекций ускорения на оси криволинейных координат

$$w_\nu = \frac{1}{H_\nu}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\nu}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{v^2}{2}\right\} (\nu = 1, 2, 3),$$

будем иметь

$$w_\Theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\Theta}}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial\Theta}\frac{v^2}{2}, \quad w_\psi = \frac{1}{\sin\Theta}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial\psi}\frac{v^2}{2}\right\}.$$

Так как $v^2 = \dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \cdot \dot{\psi}^2$, то проекции ускорения будут

$$w_\Theta = \ddot{\Theta} - \sin\Theta\cos\Theta \cdot \dot{\psi}^2, \quad w_\psi = \sin\Theta \cdot \ddot{\psi} + 2\cos\Theta \cdot \dot{\Theta}\,\dot{\psi}.$$

Отсюда для точек верхней параллели находим

$$w_\Theta = \ddot{\Theta}, \quad w_\psi = \sin\Theta \cdot \ddot{\psi}. \tag{c}$$

Учитывая (9), имеем

$$\dot{\Theta} = -\frac{\dot{u}}{\sin\Theta} = \mp \frac{\sqrt{f(u)}}{A\sin\Theta},$$

откуда

$$\ddot{\Theta} = \mp \left\{ \frac{f'(u)\,\dot{u}}{2A\sin\Theta\sqrt{f(u)}} - \frac{\sqrt{f(u)}\cos\Theta \cdot \dot{\Theta}}{A\sin^2\Theta} \right\}.$$

Подставляя $\dot{u}$ из (9), находим, что в точках верхней параллели

$$\ddot{\Theta} = -\frac{f'(u)}{2A^2\sin\Theta};$$

следовательно, $\ddot{\Theta}$ отлично от нуля, ибо u_2 является простым корнем функции $f(u)$, и $f'(u) \neq 0$.

Дифференцируя (b), получаем

$$\ddot{\psi} = \frac{d}{du}\frac{c - Cnu}{A(1-u^2)} \cdot \dot{u},$$

что в точках верхней параллели равняется нулю, ибо там $\dot{u} = 0$.

Таким образом, находим из (c), что при $u = u_2$ точка A имеет ускорения $w_\Theta \neq 0$ и $w_\psi = 0$. Поэтому появляющаяся за элементарный промежуток времени dt (или уничтожающаяся за элемент dt — при приближении точки A к параллели $u = u_2$) скорость будет направлена по касательной к меридиану, что и говорит о появлении точек заострения кривой при $u = u_2$; следовательно, кривая будет иметь вид II (фиг. 172).

Наконец, если при вращении тела ψ будет принимать значения обоих знаков, то произойдет дальнейшая деформация кривой с образованием петель, примыкающих к верхней параллели (кривая III).

4. Элементарная теория гироскопического эффекта. Гироскопом называется симметрический волчок, имеющий весьма большую угловую скорость φ собственного вращения. Гироскоп, выполненный в виде массивного тела вращения (обычно в виде тора, скрепленного с осью), составляет основу многих научных и технических приборов, нашедших свое применение благодаря важным свойствам гироскопа, кажущимся иногда парадоксальными. Для установления

этих свойств рассмотрим теорию движения гироскопа в первом приближении.

Пусть гироскопу с наклонной к вертикали осью сообщена большая угловая скорость собственного вращения $\varphi = \omega$, и гироскоп предоставлен самому себе. Тогда для последующего движения будут иметь место начальные условия: при $t=0$, $p = q = 0$, $r = \omega$. Изменяясь от нуля, величины p и q будут малы в сравнении с ω, и поэтому можно приближенно считать, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ во все время движения направлен по оси симметрии гироскопа, то есть по оси z.

Из малости p и q в сравнении с $r = \omega$ и значений проекций кинетического момента на подвижные оси координат (формулы (39—8)) вытекает, что этот момент можно приближенно определять равенством

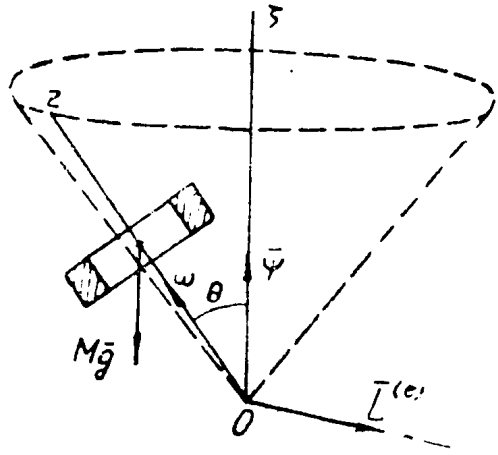
$$\boldsymbol{K} = C\boldsymbol{\omega}. \qquad \text{(a)}$$

Таким образом, в приближенной теории считается, что гироскоп совершает такое движение, при котором векторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены по оси z, совпадающей с осью гироскопа.

Этот вывод позволяет определить движение гироскопа теоремой моментов

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{L}^{(e)}, \qquad \text{(b)}$$

из которой следует, что вектор $\boldsymbol{K}$, а следовательно, и ось z движется своим концом в каждый момент времени в направлении момента внешних сил $\boldsymbol{L}^{(e)}$, то есть момента силы тяжести. Этот момент, как видно из фиг. 174, будет



Фиг. 174

в каждый момент времени направлен перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через ось z, по линии

узлов ON. Отсюда следует, что ось гироскопа будет описывать вокруг вертикальной оси прецессии ζ приближенно круговой конус с полууглом раствора θ. В действительности это основное движение оси гироскопа будет сопровождаться малыми весьма быстрыми нутационными колебаниями, происходящими в плоскости (z, ζ). Поэтому движение оси гироскопа, как приближающееся к регулярной прецессии, называется движением по закону *псевдорегулярной прецессии*.

Указанные нутационные колебания можно наблюдать на вращении обыкновенного детского волчка, где они сказываются в некоторой размытости оси и дают звуковой эффект в виде жужжания волчка.

Так как в рассматриваемой элементарной теории нутаций пренебрегается, а в силу интеграла (6) модули векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ считаются постоянными, то производная от кинетического момента по времени может рассматриваться как скорость конца вектора $\boldsymbol{K}$, полученная в результате одного только прецессионного вращения. Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{K}.$$

Подставляя это значение в (b), а также составляя момент $\boldsymbol{L}^{(e)}$, находим

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}_c \times M\boldsymbol{g},$$

или согласно (a)

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} \times C\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r}_c \times M\boldsymbol{g}. \qquad \text{(c)}$$

Так как произведение $\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\omega}$ должно быть направлено по моменту $\boldsymbol{L}^{(e)}$, то, как видно из фиг. 174, векторы $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ должны быть направлены или оба по положительным направлениям осей ζ и z соответственно, или оба по отрицательным направлениям этих осей. Следовательно, скалярные величины $\dot{\psi}$ и ω всегда имеют одинаковые знаки, откуда вытекает, что как собственное вращение гироскопа, так и прецессия его оси будут происходить или оба против движения часовой стрелки, или оба по этому движению. Поэтому, равенство модулей обеих частей в (c) с учетом того, что $|\boldsymbol{r}_c| = z_c$, дает

$$C\omega\dot{\psi}\sin\theta = Mgz_c\sin(\pi - \theta),$$

откуда

$$\dot{\psi} = \frac{Mgz_c}{C\omega}. \qquad \text{(d)}$$

Это выражение дает приближенное постоянное значение угловой скорости прецессии гироскопа. Поскольку в зна-

менателе стоит большая по модулю угловая скорость гироскопа ω, то прецессия происходит во много раз медленнее, чем собственное вращение.

Тот факт, что наклонный гироскоп не падает под действием силы тяжести, означает, что при движении гироскопа возникают инерционные силы, момент которых $\boldsymbol{H}$ относительно неподвижной точки равен и прямо противоположен моменту $\boldsymbol{L}^{(e)}$ силы тяжести. Так как согласно (c)

$$\boldsymbol{L}^{(e)} = C\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\omega},$$

то

$$\boldsymbol{H} = C\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\psi}}. \qquad \text{(e)}$$

Момент $\boldsymbol{H}$ называется *восстанавливающим* или *гироскопическим моментом*. Его модуль, как и модуль момента $\boldsymbol{L}^{(e)}$, равен

$$H = C\omega\dot{\psi}\sin\theta. \qquad \text{(f)}$$

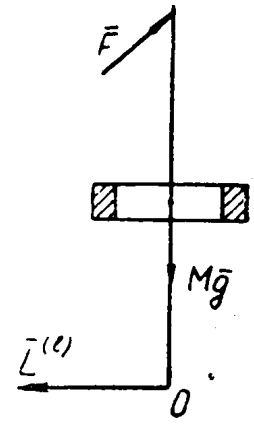
Таким образом, согласно (e) *при движении гироскопа возникает восстанавливающий момент, направленный перпендикулярно плоскости осей собственного вращения и прецессии, стремящийся совместить ось гироскопа с осью прецессии ближайшим поворотом против стрелки часов и имеющий по модулю значение* (f).

Гироскопический эффект имеет место и при явлении, называемом *вынужденной прецессией*. Представим себе, что на некотором подвижном фундаменте (на корабле, самолете и т. д.) установлено какое-либо быстро вращающееся тело (например, ротор динамомашины). Пока фундамент движется поступательно, никакого гироскопического эффекта не появляется. Если же в какой-то момент времени фундамент начинает вращаться вокруг некоторой оси (например, корабль делает поворот или испытывает качку), то эта ось для вращающегося тела будет играть роль оси прецессии и тело стремится двигаться как гироскоп. Так как, однако, опоры оси не допускают такого движения, то возникающий гироскопический момент, определяемый формулой (e), приводит к появлению пары гироскопических давлений, действующих на опоры (подшипники) оси. Этой паре отвечает пара гироскопических реакций с противоположным моментом, действующая со стороны опор на вал вращающегося тела.

Гироскопические реакции и гироскопические давления в силу большого значения ω могут достигать весьма значительной величины, в несколько раз превышающей величину статических реакций. Поэтому вал (или цапфы), а также подшипники такого тела должны быть рассчитаны на прочность по отношению к максимально возможным гироскопическим силам.

Рассмотрим еще случай гироскопа с вертикальной осью. Так как в этом случае линия действия силы тяжести проходит через неподвижную точку, то момент $L^e = 0$, и поэтому вектор K, а следовательно, и ось гироскопа, все время остается вертикальной.

Допустим, что в какой-то момент времени на вершину гироскопа подействовала некоторая дополнительная сила F (фиг. 175), перпендикулярная плоскости чертежа и направленная за чертеж. Тогда возникает момент этой силы $L^{(e)}$, направленный влево от направления силы, и согласно (b) вершина гироскопа отклонится не в направлении силы, а в направлении момента $L^{(e)}$, то есть влево. Если сила F носит кратковременный характер, то в дальнейшем гироскоп под влиянием возникшего момента силы тяжести начнет двигаться по указанному выше закону псевдорегулярной прецессии.



Фиг. 175

Если же вертикальный гироскоп несвободен и связи таковы, что не дают гироскопу возможности двигаться в направлении момента силы, то такой гироскоп по-прежнему сохранит свое вертикальное положение, удерживая вместе с собой и ту конструкцию или сооружение, на котором он установлен. На этом основаны многочисленные технические применения гироскопа в качестве стабилизатора.

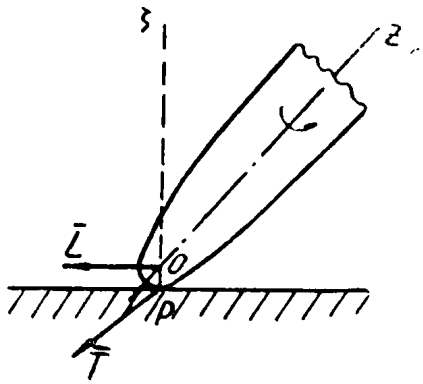
Так, мощный вертикальный гироскоп, установленный на морском корабле, будет предохранять этот корабль от качки при морском волнении. Орудийная башня на военном корабле, имеющая возможность вращаться относительно остальной части корабля и снабженная гироскопическим стабилизатором, не будет участвовать в качке корабля, что обеспечивает во время боя лучшую прицельность стрельбы.

В таком важном для авиации приборе, как авиагоризонт, вертикальный гироскоп указывает летчику в любых условиях полета положение плоскости горизонта.

Вертикальные гироскопические стабилизаторы, установленные в каждом вагоне поезда, делают возможным осуществление однорельсовой железной дороги.

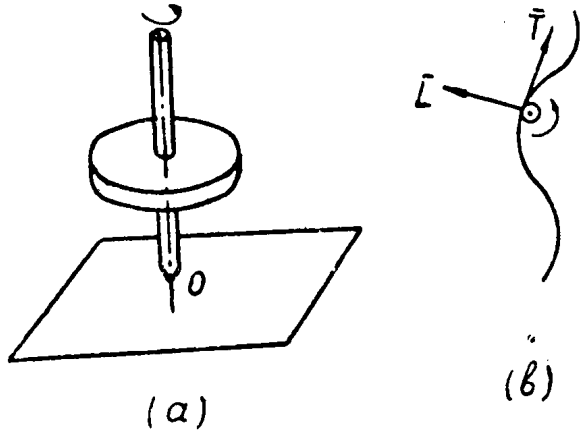
Гироскопические стабилизаторы, установленные на современных ракетах, удерживают эти ракеты от вращения вокруг их центра масс при случайных боковых нагрузках (порывы ветра, эксцентрическое положение линии действия реактивной силы и т. д.). Это позволяет ракете сохранять заданное направление полета.

Пример 1. Влияние сил трения в опоре. Рассмотрим гироскоп, выполненный в форме волчка, установленный острием своей ножки на шероховатую плоскость. Так как в действительности математически точного острия сделать нельзя, то это острие будет представлять собой некоторую малую закругленную поверхность, как показано на фиг. 176. Тогда при наклонном положении оси гироскопа в действительности неподвижной точкой будет точка O пересечения оси гироскопа с вертикалью ζ, проходящей через точку касания P острия с плоскостью. В таком случае в точке P будет существовать сила трения такого направления, что ее момент $\bar{h}$ относительно точки O окажется направленным горизонтально от оси z к оси ζ. Поэтому этот момент сил трения в опоре приведет к постепенному выпрямлению оси гироскопа.



Фиг. 176

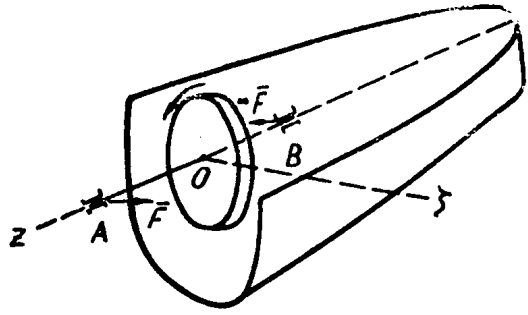
Пример 2. Если к вершине быстро вращающегося на идеально гладкой плоскости волчка (фиг. 177 (*a*)) поднести изогнутую проволоку, то волчок „прилипнет" к проволоке, двигаясь вдоль нее, следуя за всеми ее извилинами. Объясняется это тем, что возникающая при этом сила трения $\bar{T}$ (фиг. 177 (*b*)) создает момент $\bar{L}$, прижимающий вершину волчка к проволоке. При этом весь волчок вместе с его центром тяжести будет двигаться под воздействием силы трения вдоль проволоки.



Фиг. 177

Пример 3. Определить максимальное значение сил гироскопического давления, действующих на подшипники турбины, находящейся на

корабле, подвергающемся гармонической килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 секунд, если ось ротора (вращающейся части) турбины параллельна продольной плоскости корабля (фиг. 178). Ротор весит $P = 200\,кГ$, имеет радиус инерции относительно своей оси $l = 0{,}8\,м$ и делает $n = 18000\,об/мин$; расстояние между подшипниками $AB = l = 1\,м$.



Фиг. 178

При килевой качке ось ротора совершает прецессионное движение вокруг горизонтальной оси $O\zeta$, перпендикулярной продольной плоскости симметрии корабля. Ось собственного вращения z направляем в соответствии с направлением вращения ротора по его оси. При килевой качке угол ψ, определяющий вращение оси ротора вокруг оси ζ, будет в данном случае изменяться по закону

$$\psi = a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

где $a = 9° = \pi/20$ есть амплитуда колебания, $T = 15\,сек.$ — его период. Отсюда

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

что дает

$$\dot{\psi}_{max} = \frac{2\pi a}{T} = \frac{\pi^2}{10 \cdot 15} \approx \frac{1}{15} \frac{1}{сек}.$$

Угловая скорость ротора есть

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 18000}{60} = 600\,\pi \frac{1}{сек}.$$

Момент инерции ротора относительно его оси будет

$$C = Ml^2 = 200 \cdot 0{,}64 = 128\,кг \cdot м^2.$$

Тогда для максимального значения гироскопического момента, учитывая, что $\Theta = 90°$, получим:

$$H_{max} = C\omega\dot{\psi}_{max} \sin \Theta = 128 \cdot 600 \cdot \pi \frac{1}{15} \approx 16085 \frac{кг \cdot м^2}{сек^2} = 16085\,н \cdot м.$$

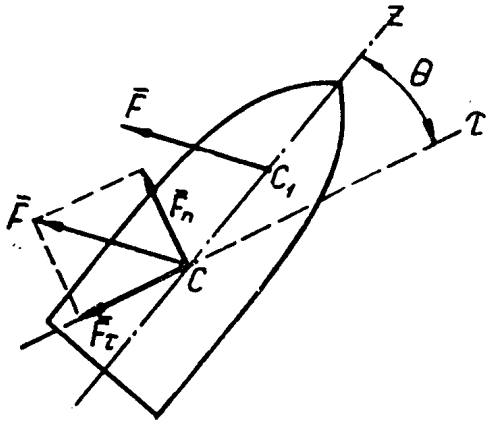
Гироскопическому моменту отвечает пара сил гироскопических давлений, действующих на подшипники; каждая из этих сил имеет максимальное значение

$$F_{max} = \frac{H_{max}}{l} = 16085\ н.$$

Это значение более чем в 16 раз превышает величину статического давления, равного для каждого подшипника 100 $кГ = 981$ $н$.

При поднятии носа корабля вектор $\dot{\phi}$ направлен по положительному направлению оси ζ; следовательно, вектор $H = C\omega \times \dot{\phi}$ направлен вверх и получающаяся пара гироскопических давлений, указанная на фиг. 178, будет стремиться уклонить судно влево от его курса. Наоборот, при опускании носа и отвечающем ему изменении направления вектора $\dot{\phi}$ на противоположное, пара давлений стремится уклонить судно вправо от курса.

5. Артиллерийский снаряд как гироскоп. Рассмотрим движение современного продолговатого снаряда при его полете в атмосфере. Силы сопротивления воздуха имеют равнодействующую **F**, линия действия которой пересекает ось снаряда в некоторой точке C_1 (фиг. 179), лежащей всегда впереди центра масс снаряда C. Под действием момента этой силы относительно C снаряд должен бы был непрерывно кувыркаться в воздухе, имея малую дальность



Фиг. 179

и дурную меткость. Для избежания этого с помощью нарезов в канале ствола и врезающегося в них медного пояска снаряда придают последнему быстрое вращение вокруг его оси, вследствие чего вращение снаряда вокруг центра масс происходит по закону движения гироскопа. При этом, если бы ось снаряда z строго совпадала с касательной к траектории центра масс снаряда, то сила была бы направлена по τ в сторону, обратную движению снаряда и не давала бы никакого момента относительно C; в этом случае снаряд двигался бы как вертикальный волчок, сохраняя совпадение своей оси с касательной τ, играющей для снаряда роль оси прецессии.

В действительности, в силу ряда причин (зазоры в канале орудия, неравномерность давления пороховых газов на дно снаряда при его вылете, порывы ветра и т. д.), ось снаряда всегда составляет некоторый угол Θ с касательной к тра-

ектории. При обычно применяемой правой нарезке ось z собственного вращения снаряда направлена к вершине снаряда. Прецессируя по закону движения гироскопа, ось снаряда в каждый момент времени будет двигаться относительно центра масс в направлении момента силы F, стремясь описать вокруг оси τ круговой конус с полууглом раствора Θ.

Это прецессионное движение влияет и на движение центра масс снаряда. В самом деле, центр масс движется под действием как силы тяжести, так и силы сопротивления F. Разлагая последнюю на две составляющих F_τ — касательную к траектории, и F_n — нормальную к ней, видим, что F_τ тормозит движение центра масс, а F_n — сообщает ему боковое движение. А так как плоскость осей z, τ, в которой лежит сила F_n, непрерывно вращается вокруг оси τ, то траектория центра масс снаряда будет иметь некоторый винтообразный вид с сильно вытянутыми витками в силу медленности прецессионного движения.

Однако указанный вид движения снаряда имел бы место только в том случае, если бы винтовая траектория центра масс снаряда имела прямолинейную ось. На самом деле она не прямолинейна, а является кривой, обращенной вогнутостью к горизонту, что приводит к постепенному понижению касательной, то есть к непрерывному уменьшению угла наклона касательной к горизонтальной плоскости. В силу этого прецессионное движение оси снаряда за один оборот следует рассматривать как происходящее не вокруг касательной в конце оборота, а вокруг некоторой оси, лежащей несколько выше этой касательной. Это обстоятельство приводит к появлению некоторых дополнительных сил и моментов.

В самом деле, установленное положение средней оси прецессии означает, что в среднем за один прецессионный оборот снаряд окажется немного повернутым вершиной вверх, что приводит к появлению дополнительной силы сопротивления с направленной вверх вертикальной составляющей. Момент этой силы относительно центра масс окажется направленным вправо от направления полета снаряда, и снаряд окажется в среднем немного повернутым вершиной вправо.

Это, в свою очередь, приведет к появлению новой добавочной силы сопротивления, имеющей направленную вправо горизонтальную составляющую. Эта сила вызовет отклонение снаряда вправо от первоначальной плоскости стрельбы или так называемую деривацию. Момент же этой силы, направленный книзу перпендикулярно оси прецессии, заставит эту ось несколько лучше следить за касательной к траектории.

В заключение заметим, что на снаряд будут действовать и другие дополнительные силы (например, вызванные различием в плотности воздуха на боковой поверхности снаряда, влиянием притупления носика снаряда, влиянием ведущего

пояска и т. д.). Поэтому ввиду большой сложности задачи точной теории движения снаряда в воздухе не существует, и здесь находят место различные приближенные методы, дающие решение лишь с той или иной степенью точности.

6. Случай Ковалевской. Как говорилось ранее, в этом случае между главными моментами инерции для неподвижной точки имеет место соотношение $A = B = 2C$, а центр тяжести тела лежит в плоскости равных моментов инерции. Так как за главные оси инерции в этой плоскости можно выбрать любые две взаимно перпендикулярные прямые, то выберем ось x проходящей через центр тяжести тела. Тогда для координат центра тяжести будем иметь $y_c = z_c = 0$.

Ограничимся только получением недостающего интеграла уравнений (1) и (2).

Уравнения (1) в данном случае примут вид:

$$2C\frac{dp}{dt} - Cqr = 0;$$

$$2C\frac{dq}{dt} + Crp = Mgx_c\gamma_3;$$

$$C\frac{dr}{dt} = -Mgx_c\gamma_2.$$

Деля эти уравнения на C и вводя обозначение

$$n = \frac{Mgx_c}{C},$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} - qr &= 0;\\ 2\frac{dq}{dt} + rp &= n\gamma_3;\\ \frac{dr}{dt} &= -n\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Выпишем также уравнения (2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3;\\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1;\\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Умножая каждое второе из уравнений (a) и (b) на $i=\sqrt{-1}$ и складывая с первым уравнением той же группы, получим:

$$2\frac{d}{dt}(p+iq)=r(q-ip)+in\gamma_3=-ir(p+iq)+in\gamma_3;$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1+i\gamma_2)=-ir(\gamma_1+i\gamma_2)+i\gamma_3(p+iq).$$

Исключим γ_3 из этих уравнений, для чего умножим первое на $p+iq$, второе — на n и вычтем второе из первого; в результате будем иметь

$$\frac{d}{dt}[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)]=-ir[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)]$$

или

$$\frac{d}{dt}\ln(P+iQ)=-ir, \tag{c}$$

где

$$P+iQ=(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)=p^2-q^2-n\gamma_1+ \\ +i(2pq-n\gamma_2). \tag{d}$$

Умножая вторые уравнения групп (a) и (b) на $-i$ и повторяя те же операции, придем к соотношению

$$\frac{d}{dt}\ln(P-iQ)=ir. \tag{e}$$

Складывая равенства (c) и (e), находим:

$$\frac{d}{dt}\ln(P^2+Q^2)=0,$$

что после интегрирования дает

$$P^2+Q^2=\text{const}$$

или согласно (d)

$$(p^2-q^2-n\gamma_1)^2+(2pq-n\gamma_2)^2=\text{const}.$$

Получили недостающий интеграл, носящий название интеграла Ковалевской.

7. Случай Бобылева—Стеклова. В качестве примера тех случаев, когда решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки получается при задании некоторых начальных данных, рассмотрим случай Бобылева—Стеклова. Этот случай получается тогда, когда $B=2A$, центр тяжести лежит на оси y ($x_c=z_c=0$) и задано начальное условие: при $t=0$ $r\neq 0$.

Решим эту задачу непосредственным интегрированием уравнений (1) и (2), принимая, что недостающий интеграл есть

$$r = 0 \tag{a}$$

во все время движения. Динамические уравнения Эйлера (1) примут тогда вид:

$$\frac{dp}{dt} = -n\gamma_3, \qquad \frac{dq}{dt} = 0, \qquad pq = n\gamma_1, \tag{b}$$

где

$$n = \frac{Mgy_c}{A}.$$

Второе уравнение (b) дает интеграл

$$q = q_0 = \text{const}, \tag{c}$$

а третье

$$p = \frac{n}{q_0}\gamma_1. \tag{d}$$

Уравнения (2) для косинусов будут тогда

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = -q_0\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{n}{q_0}\gamma_1\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \left(q_0 - \frac{n}{q_0}\gamma_2\right)\gamma_1. \tag{e}$$

Заметим, что подстановка p из (d) и γ_3 из первого уравнения (e) обращает первое уравнение (b) в тождество.

Из первых двух уравнений (e) следует

$$n\gamma_1\frac{d\gamma_1}{dt} + q_0^2\frac{d\gamma_2}{dt} = 0,$$

что после интегрирования дает

$$n\gamma_1^2 + 2q_0^2\gamma_2 = a, \tag{f}$$

где a — произвольная постоянная. Кроме того, имеем:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{g}$$

Из (f) и (g) получаем γ_2 и γ_3, выраженные через γ_1 в виде

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{a - n\gamma_1^2}{2q_0^2}; \\ \gamma_3^2 &= 1 - \gamma_1^2 - \frac{(a - n\gamma_1^2)^2}{4q_0^4}. \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Подставляя значение γ_3 в первое уравнение (e), приходим к уравнению

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \mp q_0\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \frac{(a - n\gamma_1^2)^2}{4q_0^4}},$$

где знак берется в соответствии с тем, возрастает или убывает γ_1 в данном промежутке времени. Отсюда время t выразится в виде эллиптического интеграла через γ_1 что совместно с интегралами (a), (c), (d), (f) и (g) даст полную систему шести независимых интегралов уравнений (1) и (2).

Нетрудно подстановкой выражений (a), (c), (d), (h) в интегралы моментов и кинетической энергии (3) и (4) убедиться, что эти интегралы выполняются тождественно, причем постоянные c и h выражаются через a и q_0. Это свидетельствует о совместности полученной системы интегралов между собой.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 44. Устойчивость равновесия и малые движения системы

1. О характере равновесия системы. Как мы видели в аналитической статике (§ 30, п. 12), для равновесия голономной системы, подчиненной идеальным удерживающим связям и находящейся под действием активных сил, имеющих потенциал, необходимо и достаточно, чтобы потенциал U имел стационарное значение. Это приводит к уравнениям равновесия (30—19)

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

если положение системы определять s независимыми координатами $q_1, q_2, \ldots q_s$. Так как $U = -V + C$, где V — потенциальная энергия, то иначе уравнения равновесия можно взять в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{1}$$

Эти уравнения являются необходимыми и достаточными условиями всякого равновесия; однако различные положения равновесия системы могут существенно отличаться друг от друга по своим свойствам, являясь *устойчивыми*, *неустойчивыми* или *безразличными*. Последнее было показано с качественной стороны в том же параграфе на примере с тяжелым шариком.

С той же качественной стороны возможные виды равновесия какой-либо системы материальных точек можно представить следующим образом.

Выведем систему из положения равновесия и поместим ее в какое-либо близкое положение. Если тогда окажется, что при сообщении системе в этом положении любых достаточно малых скоростей (в частности, равных нулю) последующее движение системы будет происходить в некоторой малой окрестности положения равновесия, то это положение называется положением устойчивого равновесия. При этом эту окрестность можно сделать сколь угодно малой при со-

ответствующем выборе начального отклонения и начальных скоростей.

Если же при малейшем отклонении от положения равновесия предоставленная самой себе система начнет неограниченно отклоняться от положения равновесия, то последнее называется неустойчивым.

Наконец, если в последнем случае отклоненная от положения равновесия система останется в покое, то первоначальное положение равновесия называется безразличным. В дальнейшем мы не будем рассматривать такое равновесие.

Дадим теперь математическое определение устойчивости равновесия. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что в исследуемом положении равновесия все независимые координаты q_r, определяющие положение системы, равны нулю. В самом деле, если бы это было не так и какая-либо координата в положении равновесия имела бы значение $q_{ro} \neq 0$, то, вводя новые переменные q'_r соотношениями $q'_r = q_r - q_{ro}$, пришли бы к координатам, удовлетворяющим поставленному условию.

Пусть ε — произвольное положительное число, которое может быть сколь угодно малым, и пусть η_1 и η_2 — другие достаточно малые положительные числа, значения которых зависят от ε. Тогда *какое-либо положение равновесия системы называется устойчивым, если при отклонении системы в положение, определяемое координатами, удовлетворяющими условиям*

$$|q_r^0| < \eta_1, \quad \eta_1 < \varepsilon, \tag{a}$$

и при придании ей начальных скоростей, при которых

$$|\dot{q}_r^0| < \eta_2, \tag{b}$$

окажется, что в последующем движении переменные координаты системы в любой момент времени будут удовлетворять неравенствам

$$|q_r| < \varepsilon. \tag{c}$$

Наоборот, если даже при сколь угодно малых положительных η_1 и η_2 в неравенствах (a) и (b) можно указать такое число $\varepsilon > \eta_1$, что неравенство (c) окажется нарушенным, хотя бы для одной из координат, то равновесие системы называется неустойчивым.

2. Теорема Лежен-Дирихле. Будем рассматривать голономную систему, подчиненную идеальным связям и находящуюся под действием консервативных сил. Для такой системы можно доказать следующую теорему Лежен-Дирихле, дающую достаточный признак устойчивости равновесия:

Если в положении равновесия системы потенциальная энергия активных сил имеет минимум, то это положение равновесия есть положение устойчивого равновесия.

Будем по-прежнему считать значения координат q_r в положении равновесия равными нулю. Так как потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, то, распоряжаясь выбором этой постоянной, можем принять, что в положении равновесия $V=0$. По условию теоремы, $V=0$ есть минимальное значение потенциальной энергии для некоторой окрестности положения равновесия, в которой всюду $V>0$. Тогда будет существовать такая область изменения координат

$$|q_r|<\varepsilon,$$

называемая *областью минимума* функции V, в которой при возрастании модуля любой координаты от нуля функция V будет тоже только возрастать.

Придадим одной из координат значение, при котором $|q_r|=\varepsilon$, отвечающее границе области минимума, меняя значения остальных координат всевозможным образом внутри этой области. Наименьшее из получающихся при этом значений потенциальной энергии обозначим через P_r. Проделывая эту операцию со всеми координатами поочередно, получим совокупность положительных чисел $P_1, P_2, \ldots, P_s$. Пусть P будет наименьшим из этих значений потенциальной энергии. Если тогда в каком-либо положении системы в рассматриваемой области будет $V<P$, то ни одна из координат не достигает границы области минимума, и поэтому для всех координат будет выполняться условие $|q_r|<\varepsilon$.

Выведем теперь систему из положения равновесия и поместим ее в такое положение

$$|q_r^0|<\eta_1, \qquad \text{(а)}$$

чтобы для начальной потенциальной энергии V_0 выполнялось неравенство

$$V_0<P.$$

Считая связи системы склерономными, будем иметь для последующего движения закон сохранения энергии

$$T+V=T_0+V_0.$$

Так как кинетическая энергия системы существенно положительна, то отсюда следует, что всегда

$$V\leqslant T_0+V_0.$$

Придадим точкам системы столь малые начальные скорости, удовлетворяющие условию

$$|\dot{q}_r^0| < \eta_{12}, \tag{b}$$

чтобы было

$$T_0 < P - V_0.$$

Отсюда вытекает, что

$$T_0 + V_0 < P,$$

и поэтому

$$V < P,$$

чему для любого момента времени отвечают, как мы видели, неравенства

$$|q_r| < \varepsilon. \tag{c}$$

Но при условиях (a), (b) и (c) положение равновесия системы будет положением устойчивого равновесия; тем самым теорема доказана.

Заметим, что предыдущее доказательство справедливо только для того случая, когда потенциальная энергия зависит от всех координат q_r. Если же она зависит только от некоторых из них, то, хотя условиям (a) и (b) можно удовлетворить, ни откуда не следует, что условия (c) могут быть выполнены для тех координат, от которых V не зависит; поэтому положение равновесия может оказаться неустойчивым.

Вопросом об установлении теоремы, обратной теореме Лежен — Дирихле занимались многие ученые. Наиболее существенные результаты, весьма важные для приложений, были получены Ляпуновым в виде следующих двух теорем:

1. Если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума и отсутствие минимума определяется с помощью вторых производных от потенциальной энергии, то положение равновесия неустойчиво.

2. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и если наличие этого максимума определяется с пмощью производных наинизшего порядка, отличных от нуля, то положение равновесия тоже неустойчиво.

Доказательство этих теорем рассматривать не будем.

Пример 1. Рассмотрим простейший пример с круговым математическим маятником (фиг. 180). Потенциальная энергия силы тяжести будет

$$V = -mgz = -mgl\cos\varphi,$$

где $l = OM$ — длина маятника. Имеем согласно (1) одно уравнение равновесия

$$\frac{dV}{d\varphi} = mgl\sin\varphi = 0,$$

что дает два положения равновесия

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,$$

которым на фиг. 180 отвечают точки A и B соответственно.

Так как вторая производная есть

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = mgl\cos\varphi,$$

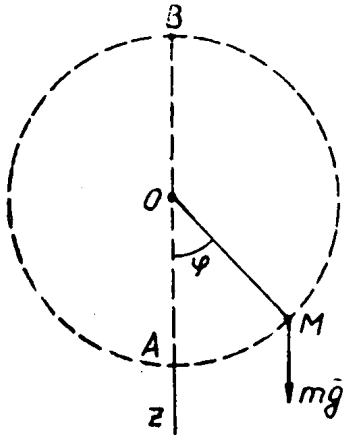
то в положении A она имеет значение

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} = mgl > 0,$$

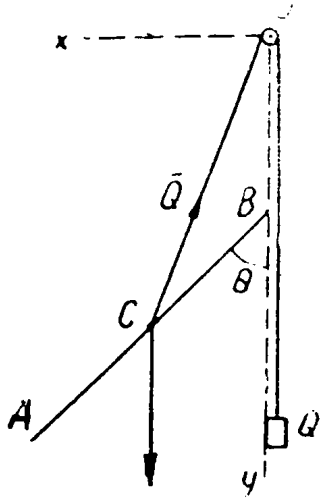
а в положении B

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2} = -mgl < 0.$$

Поэтому в положении A потенциальная энергия имеет минимум, и, следовательно, по теореме Лежен-Дирихле это положение будет положением устойчивого равновесия. В положении же B потенциальная энергия имеет максимум, и



Фиг. 180



Фиг. 181

поэтому по любой из теорем Ляпунова это положение будет положением неустойчивого равновесия.

Пример 2. Однородный тяжелый стержень AB (фиг. 181) веса P может шарнирно вращаться вокруг своего конца B. Для удержания стержня в равновесии к его центру тяжести C прикреплена нить, перекинутая через ничтожно малый блок O и несущая на своем конце груз Q. Определить положение и характер равновесия стержня, если точка O находится над точкой B на одной вертикали и $OB = BC$.

Стержень находится под действием двух активных сил, приложенных в центре тяжести C: силы тяжести P, направленной вертикально вниз, и силы Q, направленной по нити. Вводя указанные на фиг. 181 оси x и y и обозначая через θ угол, образуемый стержнем с вертикалью, будем иметь для проекций равнодействующей указанных сил на оси координат следующие значения:

$$X = -Q\sin\frac{\theta}{2},\quad Y = P - Q\cos\frac{\theta}{2}.$$

Пусть x, y — координаты центра тяжести C. Из чертежа задачи имеем:

$$x = a\sin\theta,\quad y = a(1+\cos\theta),$$

где $a = OB = BC$; отсюда

$$dx = a\cos\theta d\theta;\ dy = -a\sin\theta d\theta.$$

Составляем выражение элементарной работы:

$$d'A = Xdx + Ydy = a\left\{Q\left(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta + \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right) + \right.$$

$$\left. - P\sin\theta\right\} d\theta = a\left(Q\sin\frac{\theta}{2} - P\sin\theta\right)d\theta.$$

Так как это выражение есть взятый с обратным знаком полный дифференциал функции

$$V = a\left(2Q\cos\frac{\theta}{2} - P\cos\theta\right) + \text{const},$$

то эта функция и будет потенциальной энергией.

Уравнение равновесия есть

$$\frac{dV}{d\theta} = a\left(-Q\sin\frac{\theta}{2} + P\sin\theta\right) = 0$$

или

$$\sin\frac{\theta}{2}\left(-Q + 2P\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Отсюда имеем два положения равновесия:

1) $\sin\dfrac{\theta}{2} = 0,\ \theta_1 = 0,$

2) $-Q + 2P\cos\dfrac{\theta}{2} = 0,\ \cos\dfrac{\theta_2}{2} = \dfrac{Q}{2P}.$

Второе положение равновесия имеет место только при $Q < 2P$, ибо косинус должен быть меньше единицы. Если же $Q > 2P$, будет существовать лишь одно первое положение равновесия.

Оценим характер полученных равновесных положений стержня. Имеем

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = a\left(-\frac{1}{2}Q\cos\frac{\theta}{2} + P\cos\theta\right).$$

Для первого положения находим

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_1} = a\left(-\frac{1}{2}Q + P\right).$$

Следовательно, при $Q < 2P$ вторая производная положительна, а при $Q > 2P$ — отрицательна. Поэтому первое положение равновесия при $Q < 2P$ устойчиво, а при $Q > 2P$ — неустойчиво.

Так как во втором положении равновесия

$$\cos\theta_2 = 2\cos^2\frac{\theta_2}{2} - 1 = \frac{Q^2}{2P^2} - 1,$$

то

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right| = a\left(-\frac{Q^2}{4P} + \frac{Q^2}{2P} - P\right) = Pa\left(\frac{Q^2}{4P^2} - 1\right),$$

что меньше нуля при возможном в данном случае соотношении $Q < 2P$. Отсюда из любой теоремы Ляпунова вытекает, что второе положение равновесия, если оно существует, неустойчиво.

3. Постановка задачи о малых движениях системы. Рассмотрим «малые» движения системы около какого-либо ее положения равновесия, то есть такие движения, в которых независимые координаты q_r и скорости точек системы малы, если считать, что в положении равновесия все q_r равны нулю. Будем по-прежнему иметь дело с голономной системой, подчиненной идеальным и склерономным связями.

Пусть на систему действуют двоякого рода силы: силы, имеющие потенциал, и силы сопротивления среды, в которой происходит движение. Так как скорости малы, то сила сопротивления, действующая на какую-либо точку системы, может считаться пропорциональной скорости точки. Поэтому каждую такую силу можно определить формулой

$$\mathbf{F}_i' = -\beta_i \boldsymbol{v}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где постоянные β_i положительны.

Используя формулы (30—13) для обобщенных сил

$$Q_r = \sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}$$

и соотношение (36—8)

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_r},$$

полученное при преобразовании общего уравнения механики к независимым координатам, находим, что обобщенные силы, отвечающие силам сопротивления среды, будут

$$Q_r' = -\sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \sum \beta_\nu \frac{\dot{x}_\nu^2}{2},$$

где принято $\beta_{\nu-2} = \beta_{\nu-1} = \beta_\nu$ при $\nu = 3i$. Вводя функцию

$$F = \frac{1}{2} \sum \beta_\nu \dot{x}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum \beta_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \qquad (2)$$

называемую *функцией рассеяния* или *диссипативной функцией*, получаем

$$Q_r' = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (3)$$

Как видим, функция рассеяния имеет тот же вид, что и кинетическая энергия системы, с той лишь разницей, что массы точек системы заменены другими положительными постоянными β_i. Видим также, что функция F, как и кинетическая энергия, является существенно положительной квадратичной формой, обращающейся в нуль лишь при нулевых значениях скоростей точек системы.

В рассматриваемом случае склерономных связей кинетическая энергия является, как мы знаем, однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho. \tag{4}$$

Преобразование функции F к независимым координатам приведет эту функцию к аналогичному виду

$$F = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} B_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho, \tag{5}$$

где коэффициенты $B_{r\rho}$ имеют те же значения, что и соответствующие коэффициенты $A_{r\rho}$, в которых только массы точек m_i заменены на постоянные β_i.

Так как обобщенные силы, отвечающие консервативным силам, будут

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}\ (r = 1, 2, \ldots, s),$$

то уравнения Лагранжа второго рода примут в данном случае вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\ (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{6}$$

Из этих уравнений можно установить механический смысл функции рассеяния. Умножая каждое уравнение (6) на $\dot{q}_r$ и суммируя результаты по всем значениям r, получаем:

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r - \frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r\right) + \sum\frac{\partial V}{\partial q_r}\dot{q}_r = -\sum\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r.$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\cdot\dot{q}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r,$$

то полученное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r - \sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r\right) + \sum\frac{\partial V}{\partial q_r}\dot{q}_r = -\sum\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r. \tag{a}$$

Применяя теорему Эйлера об однородных функциях, имеем

$$\sum\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r = 2T,\quad \sum\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r = 2F.$$

Кинетическая энергия зависит от q_r и $\dot{q}_r$, а потенциальная только от q_r, поэтому

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r\right)=\frac{dT}{dt},\quad \sum\frac{\partial V}{\partial q_r}\dot{q}_r=\frac{dV}{dt}.$$

В результате уравнение (а) переходит в соотношение

$$\frac{d}{dt}(T+V)=-2F.$$

Из этого равенства виден механический смысл функции рассеяния. Так как при движении $F>0$, то правая часть отрицательна; следовательно, при движении системы в сопротивляющейся среде происходит убывание полной энергии системы $T+V$, и функция $2F$ представляет собой меру убывания энергии системы.

4. Составление уравнений малых движений. Преобразуем уравнения (6), пользуясь малостью значений q_r, $\dot{q}_r$ в рассматриваемой области.

Коэффициенты $A_{r\rho}$, входящие в выражение (4) кинетической энергии и зависящие только от координат q_r, разложим в ряды Маклорена по степеням этих координат; получим

$$A_{r\rho}=(A_{r\rho})_0+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{r\rho}}{\partial q_j}\right)_0 q_j+\ldots,$$

где нулевым индексом обозначено значение величин при нулевых значениях координат, то есть в положении равновесия системы. Отбрасывая, как малые, все члены ряда, кроме первого, и вводя обозначение

$$a_{r\rho}=a_{\rho r}=(A_{r\rho})_0=A_{r\rho}(0,\ 0,\ldots,\ 0),$$

можем для кинетической энергии системы взять выражение

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s}a_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho, \tag{7}$$

где коэффициенты $a_{r\rho}$ будут постоянными числами.

Проводя ту же операцию над коэффициентами функции (5), найдем для функции рассеяния

$$F=\frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s}b_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho \tag{8}$$

при постоянных коэффициентах

$$b_{r\rho}=b_{\rho r}=(B_{r\rho})_0=B_{r\rho}(0,\ 0,\ldots,\ 0).$$

Потенциальную энергию консервативных сил, зависящую только от координат q_r, тоже разложим в ряд Маклорена; получим

$$V=V_0+\sum\left(\frac{\partial V}{\partial q_r}\right)_0 q_r+\frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r\partial q_\rho}\right)_0 q_r q_\rho+\ldots,$$

где снова индекс „нулик" указывает на значение данных величин в положении равновесия. Как и ранее, принимаем $V_0 = V(0, 0, \ldots 0) = 0$. Так как на покоющуюся систему силы сопротивления среды не действуют, то уравнения равновесия будут иметь тот же вид (1), поэтому

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_r}\right)_0 = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Полагая

$$c_{r\rho} = c_{\rho r} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_\rho}\right)_0$$

и отбрасывая малые высших порядков, получаем для потенциальной энергии выражение

$$V = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho} q_r q_\rho, \tag{9}$$

в котором коэффициенты $c_{r\rho}$ постоянны.

Из полученных выражений (7), (8) и (9) находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{\rho=1}^{s} a_{r\rho}\dot{q}_\rho, \quad \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{\rho=1}^{s} b_{r\rho}\dot{q}_\rho, \quad \frac{\partial V}{\partial q_r} = \sum_{\rho=1}^{s} c_{r\rho} q_\rho.$$

Подставляя эти значения в уравнения (6), приходим к дифференциальным уравнениям малых движений

$$\sum_{\rho=1}^{s} (a_{r\rho}\ddot{q}_\rho + b_{r\rho}\dot{q}_\rho + c_{r\rho}q_\rho) = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{10}$$

5. Интегрирование уравнений малых движений. Уравнения (10) представляют собой однородную систему s совокупных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, частный интеграл такой системы следует искать в виде

$$q_\rho = A_\rho e^{\lambda t} \ (\rho = 1, 2, \ldots, s). \tag{а}$$

Подставляя эти значения функций q_ρ в (10) и сокращая в каждом уравнении множитель $e^{\lambda t}$, приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений для коэффициентов A_ρ:

$$\sum_{\rho=1}^{s} (a_{r\rho}\lambda^2 + b_{r\rho}\lambda + c_{r\rho}) A_\rho = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{11}$$

Эта система уравнений должна иметь решение, в котором не все A_ρ равны нулю. Поэтому определитель $\Delta(\lambda)$, составленный из коэффициентов при неизвестных, должен равняться нулю:

$$\Delta(\lambda) \equiv \| a_{r\rho}\lambda^2 + b_{r\rho}\lambda + c_{r\rho} \| = 0$$

или подробно:

$$\Delta(\lambda) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2+b_{11}\lambda+c_{11}, & a_{12}\lambda^2+b_{12}\lambda+c_{12}, \ldots, & a_{1s}\lambda^2+b_{1s}\lambda+c_{1s} \\ a_{21}\lambda^2+b_{21}\lambda+c_{21}, & a_{22}\lambda^2+b_{22}\lambda+c_{22}, \ldots, & a_{2s}\lambda^2+b_{2s}\lambda+c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}\lambda^2+b_{s1}\lambda+c_{s1}, & a_{s2}\lambda^2+b_{s2}\lambda+c_{s2}, \ldots, & a_{ss}\lambda^2+b_{ss}\lambda+c_{ss} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Получили так называемое характеристическое уравнение степени $2s$ относительно λ.

Предположим, что все $2s$ корней уравнения (12) простые. В этом случае, решая систему (11), найдем для каждого корня свою систему значений коэффициентов A_ρ. Обозначим через $A_{\rho j}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, s$) совокупность коэффициентов, отвечающих какому-либо корню λ_j уравнения (12). Тогда, согласно (а), общий интеграл уравнений малых движений представится формулами

$$q_\rho = \sum_{j=1}^{2s} A_{\rho j} e^{\lambda_j t} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, s), \tag{13}$$

Так как решение системы (11) для каждого λ_j определяется с точностью до произвольного множителя, то эти $2s$ множителей, входящие в коэффициенты $A_{\rho j}$, явятся постоянными интегрирования. Их можно ввести явно, если вспомнить что решение системы (11) записывается в виде

$$A_{\rho j} = C_j \Delta_{\rho j}, \tag{14}$$

где C_j — произвольная постоянная, а

$$\Delta_{\rho j} = \Delta_\rho(\lambda_j)$$

есть алгебраическое дополнение (то есть минор с соответствующим знаком) для элемента с номером ρ какой-либо строки определителя $\Delta(\lambda)$, сосчитанное для значения $\lambda = \lambda_j$. При этом из отсутствия кратных корней уравнения (12) вытекает, что при любом j $\Delta_{\rho j}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, s$) не могут все одновременно равняться нулю. Следовательно, общий интеграл (13) можно еще взять в форме

$$q_\rho = \sum_{j=1}^{2s} C_j \Delta_{\rho j} e^{\lambda_j t} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, s). \tag{15}$$

6. Исследование корней характеристического уравнения и характера положения равновесия. Запишем уравнения (11) для какого-либо корня λ_j характеристического уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{s}(a_{r\rho}\lambda_j^2 + b_{r\rho}\lambda_j + c_{r\rho})A_{\rho j} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s) \qquad \text{(a)}$$

Уравнения (11) для другого корня λ_h можно записать в виде

$$\sum_{r=1}^{s}(a_{\rho r}\lambda_h^2 + b_{\rho r}\lambda_h + c_{\rho r})A_{rh} = 0 \quad (\rho = 1, 2, \ldots, s) \qquad \text{(b)}$$

Умножим теперь каждое уравнение (a) на соответствующий коэффициент A_{rh} и результаты умножения сложим; получим

$$\lambda_j^2 \sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}A_{\rho j}A_{rh} + \lambda_j \sum_{r,\rho=1}^{s} b_{r\rho}A_{\rho j}A_{rh} + \sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho}A_{\rho j}A_{rh} = 0.$$

Стоящие в этом выражении суммы равны соответственно удвоенным функциям T, F и V, в которых обобщенные скорости или обобщенные координаты заменены коффициентами $A_{\rho j}$ и A_{rh}. Если же исходить из уравнений (b), то, умножая каждое уравнение на $A_{\rho j}$ и складывая, мы пришли бы к тому же уравнению с той только разницей, что вместо λ_j стояло бы λ_h. Решая эти квадратные уравнения, мы получили бы из каждого уравнения два одинаковых значения λ. А так как было принято, что среди корней характеристического уравнения нет равных между собой, то каждый корень λ_h должен совпадать с одним из корней λ_j, оставаясь простым корнем уравнения (12). Отсюда следует, что полученное уравнение имеет место только для $h = j$; если же $h \neq j$, то двойные суммы, составляющие коэффициенты уравнения, тождественно равны нулю. Вводя обозначения

$$T(A) = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}A_{\rho j}A_{rj}, \quad F(A) = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} b_{r\rho}A_{\rho j}A_{rj},$$

$$V(A) = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho}A_{\rho j}A_{rj}, \qquad (16)$$

можем поэтому последнее уравнение переписать в форме

$$\lambda_j^2 T(A) + \lambda_j F(A) + V(A) = 0. \qquad \text{(c)}$$

Коэффициенты этого уравнения, то есть величины (16), следовало бы снабдить индексом j; однако для сокращения записей этого делать не будем.

Заметим, что из уравнений (11) каждому вещественному корню λ_j характеристического уравнения будет отвечать система вещественных значений коэффициентов $A_{\rho j}$. В этом случае квадратичные формы $T(A)$ и $F(A)$ будут существенно положительными. Если же какой-либо корень λ_j будет комплексным, то будет существовать и сопряженный ему корень λ_j'. При этом для каждого из этих корней уравнения (11) дадут комплексные значения коэффициентов $A_{\rho j}$, тоже сопряженные между собой; поэтому если для корня λ_j

$$A_{\rho j} = \alpha_\rho + i\beta_\rho \, (\rho = 1, 2, \ldots, s),$$

то для корня λ_j' будем иметь

$$A_{\rho j}' = \alpha_\rho - i\beta_\rho \, (\rho = 1, 2, \ldots, s)$$

(индекс j в правых частях опускаем).

Так как пара корней λ_j, λ_j' должна определяться уравнением (c), то, например, коэффициент $T(A)$ этого уравнения согласно (16) будет:

$$T(A) = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} A_{\rho j} A_{rj}' = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}(\alpha_\rho + i\beta_\rho)(\alpha_r - i\beta_r) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}(\alpha_\rho\alpha_r + \beta_\rho\beta_r) + \frac{i}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}(\beta_\rho\alpha_r - \alpha_\rho\beta_r).$$

Каждый член второй суммы при $\rho = r$ обращается в нуль, а каждому члену для $\rho \neq r$ отвечает такой же член с противоположным знаком, получающийся при перестановке индексов. Следовательно, эта сумма равна нулю, и мы будем иметь

$$T(A) = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}\alpha_\rho\alpha_r + \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho}\beta_\rho\beta_r = T(\alpha) + T(\beta).$$

Аналогично найдем:

$$F(A) = F(\alpha) + F(\beta), \quad V(A) = V(\alpha) + V(\beta).$$

Таким образом, для каждой пары комплексных сопряженных корней квадратичные формы $T(A)$, $F(A)$ и $V(A)$ оказываются равными суммам двух квадратичных форм от вещественных аргументов. Поэтому и в этом случае формы $T(A)$ и $F(A)$ будут существенно положительными.

Записывая решение уравнения (c), находим, что корни характеристического уравнения (12) распадаются на пары корней вида

$$\lambda_j = \frac{-F(A) \pm \sqrt{F^2(A) - 4T(A)\,V(A)}}{2T(A)} \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \quad (17)$$

Согласно (13) координаты q_ρ и обобщенные скорости $\dot{q}_\rho$ имеют порядок величины, одинаковый с порядком коэффициентов $A_{\rho j}$; поэтому $T(A)$, $F(A)$ и $V(A)$ имеют тот же порядок, что и функции T, F и V в рассматриваемой окрестности положения равновесия системы. Это и позволяет дать оценку корням λ_j по формулам (17).

Так как квадратичные формы T и F существенно положительны, то характер корней λ_j существенным образом зависит от значения $V(A)$. В положении равновесия $V = 0$ и это значение является стационарным. Мы ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда потенциальная энергия имеет в положении равновесия или максимум или минимум, то есть, когда в окрестности этого положения $V < 0$ или $V > 0$ соответственно.

1. В случае $V < 0$ будем иметь и $V(A) < 0$. Тогда

$$F^2(A) - 4T(A)\,V(A) > F^2(A),$$

и радикал, стоящий в (17), будет больше $F(A)$. Следовательно, в этом случае корни характеристического уравнения будут вещественны, и половина корней будет иметь отрицательный знак, а другая половина — положительный. Это означает, что члены общего решения (13) не будут иметь периодического характера и что с течением времени модули половины членов этого решения будут непрерывно возрастать, и поэтому система будет неограниченно удаляться от положения равновесия. Таким образом, малые движения системы в окрестности положения равновесия будут в этом случае апериодическими, а само это положение будет положением неустойчивого равновесия.

Поскольку V определяется выражением (9), содержащим коэффициенты $c_{r\rho}$, равные значениям производных второго порядка от V в положении равновесия, то приведенное рассуждение можно рассматривать как частичное доказательство первой теоремы Ляпунова.

2. Случай, когда в окрестности положения равновесия $V > 0$ и при котором

$$F^2(A) - 4T(A)\,V(A) < F^2(A),$$

можно разделить еще на три более частных случая.

а. Сопротивление среды настолько велико, что $F^2(A) > 4T(A)\,V(A)$. Тогда, учитывая, что радикал в (17) будет меньше $F(A)$, найдем, что все корни характеристического уравнения будут вещественны и отрицательны. Поэтому с течением времени все члены решения (13) будут неограниченно убывать, и система будет со временем все более

приближаться к положению равновесия. Следовательно, малые движения системы будут затухающими апериодическими, а положение равновесия — положением устойчивого равновесия.

b. Сопротивление среды настолько мало, что $F^2(A) < 4T(A)V(A)$. В таком случае корни (17) характеристического уравнения оказываются комплексными, распадаясь на пары сопряженных корней

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j,\ \lambda_j' = \mu_j - i\nu_j\ (j = 1, 2, \ldots, s). \qquad \text{(d)}$$

Тогда из уравнений (11) коэффициенты $A_{\rho j}'$, отвечающие каждому корню λ_j', получатся как сопряженные с коэффициентами $A_{\rho j}$ для корня λ_j, а решение (13) примет вид:

$$q_\rho = \sum_{j=1}^{s} e^{\mu_j t}(A_{\rho j}e^{i\nu_j t} + A_{\rho j}'e^{-i\nu_j t}).$$

Переходя в этом выражении от показательных функций с мнимыми показателями к тригонометрическим и вводя обозначения

$$M_{\rho j} = A_{\rho j} + A_{\rho j}',\ N_{\rho j} = i(A_{\rho j} - A_{\rho j}'), \qquad \text{(e)}$$

получим

$$q_\rho = \sum_{j=1}^{s} e^{\mu_j t}(M_{\rho j}\cos\nu_j t + N_{\rho j}\sin\nu_j t)\ (\rho = 1, 2, \ldots, s). \qquad \text{(f)}$$

Сличая выражения (d) с формулой (17), видим, что

$$\mu_j = -\frac{F(A)}{2T(A)} < 0.$$

А так как выражению в скобках в формулах (f) отвечает простое гармоническое колебание, то каждая координата q_ρ оказывается в данном случае выражающейся в виде суммы s затухающих колебаний. Следовательно, малые движения системы снова будут затухающими, а равновесное положение системы — положением устойчивого равновесия.

c. Сопротивление среды отсутствует. В этом случае $F(A)=0$, и корни характеристического уравнения согласно (17) будут иметь чисто мнимые значения

$$\lambda_j = \pm i\nu_j = \pm i\sqrt{\frac{V(A)}{T(A)}}\ (j = 1, 2, \ldots, s). \qquad (18)$$

Так как теперь все $b_{r\rho} = 0$, то определитель $\Delta(\lambda)$ будет содержать члены только с четными степенями от λ. Тем же свойством будут обладать и все $\Delta_{\rho j}$, что в силу $\lambda_j^2 = \lambda_j'^2 = -\nu_j^2$ дает $\Delta_{\rho j} = \Delta_\rho(\lambda_j) = \Delta_\rho(\lambda_j')$. Поэтому из выражений (14) для сопряженных коэффициентов будем иметь

$$A_{\rho j}' = C_j'\Delta_{\rho j},$$

где в силу вещественности всех $\Delta_{\rho j}\ C_j'$ есть комплексная постоянная интегрирования, сопряженная с C_j. Тогда по (e)

$$M_{\rho j} = \Delta_{\rho j}(C_j + C_j'),\ N_{\rho j} = \Delta_{\rho j} i (C_j - C_j').$$

Подставляя эти значения, а также значения $\mu_j = 0$ в (f), и вводя новые вещественные произвольные постоянные H_j и ε_j соотношениями

$$H_j \sin \varepsilon_j = C_j + C_j',\ H_j \cos \varepsilon_j = i (C_j - C_j'),$$

можем закон движения системы представить в виде

$$q_\rho = \sum_{j=1}^{s} \Delta_{\rho j} H_j \sin (\nu_j t + \varepsilon_j)\ (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (19)$$

Таким образом, в данном случае движение системы будет складываться из простых гармонических колебаний около положения равновесия, причем каждая координата равна линейной комбинации таких колебаний. Выбором начальных данных эти колебания, а следовательно, и координаты q_ρ можно заключить в сколь угодно тесные границы; поэтому положение равновесия системы будет положением устойчивого равновесия.

Малые колебания, входящие в (19), имеют частоты ν_j, определяемые формулой (18). Если в (12) положить $b_{r\rho} = 0$ и сделать замену $\lambda^2 = -\nu^2$, то это уравнение будет служить для определения значений ν^2. Поэтому уравнение (12) в этом случае принято называть *уравнением частот*.

7. Главные координаты и главные колебания. Последний результат показывает, что малые движения системы около положения устойчивого равновесия при отсутствии сопротивления среды являются малыми колебаниями, при которых каждая независимая координата равна линейной функции простых гармонических колебаний $H_j \sin (\nu_j t + \varepsilon_j)$. Легко видеть, что можно выбрать такие координаты, чтобы каждая из них выражалась бы через одно гармоническое колебание. В самом деле, поскольку потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум, равный нулю, то в рассматриваемой окрестности этого положения она всюду больше нуля; поэтому функция V так же, как и T, есть существенно положительная квадратичная форма. Следовательно, преобразованием к главным осям можно прийти к таким независимым координатам $\Theta_j\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$, в которых эти функции будут содержать лишь квадраты переменных, то есть

$$T = \frac{1}{2} \sum a_j \dot{\Theta}_j^2,\ V = \frac{1}{2} \sum c_j \Theta_j^2 \qquad (a)$$

Уравнения Лагранжа в этих переменных принимают вид:

$$a_j \ddot{\Theta}_j + c_j \Theta_j = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$\Theta_j = H_j \sin(\nu_j t + \varepsilon_j) \ (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{20}$$

где

$$\nu_j = \sqrt{\frac{c_j}{a_j}} \tag{b}$$

являются частотами колебаний, H_j и ε_j — постоянными интегрирования. Тем самым каждая координата оказалась выраженной лишь через одно гармоническое колебание. Эти координаты и колебания называются главными или нормальными координатами и колебаниями.

Приведение функций T и V к виду (a) можно сделать преобразованием координат, полагая

$$q_r = \sum_{j=1}^{s} \Delta_{rj} \Theta_j.$$

Тогда будем иметь

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} \dot{q}_r \dot{q}_\rho = \frac{1}{2} \sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} \sum_{j,h=1}^{s} \Delta_{rj} \Delta_{\rho h} \dot{\Theta}_j \dot{\Theta}_h.$$

Меняя порядок суммирования, имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^{s} \dot{\Theta}_j \dot{\Theta}_h \sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} \Delta_{rj} \Delta_{\rho h}. \tag{c}$$

Аналогично найдем:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^{s} \Theta_j \Theta_h \sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho} \Delta_{rj} \Delta_{\rho h}. \tag{d}$$

Согласно (14) получаем:

$$\sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} \Delta_{rj} \Delta_{\rho h} = \frac{1}{C_j C_h} \sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} A_{rj} A_{\rho h},$$

$$\sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho} \Delta_{rj} \Delta_{\rho h} = \frac{1}{C_j C_h} \sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho} A_{rj} A_{\rho h}.$$

Как было установлено ранее, стоящие в правых частях двойные суммы равны нулю при $j \neq h$. Поэтому в формулах (c) и (d) останутся лишь члены с $j = h$. Таким образом, вводя обозначения

$$a_j = \sum_{r,\rho=1}^{s} a_{r\rho} \Delta_{rj} \Delta_{\rho j}, \ c_j = \sum_{r,\rho=1}^{s} c_{r\rho} \Delta_{rj} \Delta_{\rho j}, \tag{e}$$

мы и получим для функций T и V выражения (a). Так как a_j и c_j равны существенно положительным квадратичным формам $2T$ и $2V$, в которых независимые переменные заменены величинами Δ_{rj}, то $a_j > 0$ и $c_j > 0$, что обеспечивает вещественность значений частот главных колебаний ν_j, определяемых формулами (b).

С другой стороны значения (e) коэффициентов a_j и c_j можно еще записать в виде

$$a_j = \frac{2}{C_j^2} T(A),\ c_j = \frac{2}{C_j^2} V(A).$$

Подставляя эти значения в выражения (b), находим:

$$\nu_j = \sqrt{\frac{V(A)}{T(A)}},$$

что согласно (18) совпадает со значением частот тех колебаний, из которых составлены произвольные координаты q_r. Следовательно, всякие произвольные координаты являются в рассматриваемом движении линейными комбинациями главных колебаний или координат. Очевидно, это свойство вытекает и из введенного нами преобразования координат.

8. Случай кратных корней характеристического уравнения. Лагранж, исходя из общей теории дифференциальных уравнений, полагал, что если характеристическое уравнение (12) имеет кратный корень λ_j, например, двойной кратности, то отвечающее ему частное решение следует брать в форме

$$q_\rho = (A_{\rho j} + A'_{\rho j} t)\, e^{\lambda_j t}.$$

Поэтому он считал, что положение равновесия системы в этом случае будет всегда неустойчивым, ибо при $t \to \infty$ член $A'_{\rho j} t$ тоже стремится к бесконечности.

Вейерштрасс вскрыл ошибочность этих рассуждений Лагранжа. Он показал, что в случае корня кратности p такое же число уравнений (11) оказывается тождественным между собой. Поэтому $p-1$ уравнений можно отбросить, в результате чего для коэффициентов A_ρ останется лишь $s-p+1$ уравнений. В то же время ранг матрицы*) определителя (12) будет равен $s-p$, и характеристическое уравнение заменится равенством нулю любого определителя $(s-p+1)$-го порядка, составленного из коэффициентов при $s-p+1$ величинах A_ρ; при этом все корни λ_j такого характеристического уравнения окажутся простыми,

*) Напомним, что рангом матрицы называется наивысший порядок, который имеет хотя бы один отличный от нуля определитель, получающийся вычеркиванием строк и столбцов матрицы.

и общее решение составится из $2(s-p+1)$ частных решений вида $A_{\rho j}e^{\lambda_j t}$.

Таким образом, в случае, например, малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия общее решение для каждой координаты представится линейной комбинацией только $s-p+1$ колебаний. Тем не менее легко видеть, что это решение будет по-прежнему содержать $2s$ произвольных постоянных. В самом деле, при отсутствии кратных корней мы могли бы, как известно, в качестве произвольной постоянной взять любой из коэффициентов $A_{\rho j}$, для которого $\Delta_{\rho j} \neq 0$; тогда из системы (11) все остальные коэффициенты выразятся через $A_{\rho j}$. В случае же кратного корня из оставшейся системы $s-p+1$ уравнений можно выразить только $s-p$ коэффициентов через p остальных, которые и окажутся вполне произвольными. Следовательно, каждому кратному корню будет отвечать столько произвольных постоянных, какова его кратность. Поэтому общее решение будет содержать по-прежнему $2s$ произвольных постоянных, которые только войдут в него в иной форме.

Рассмотрим, например, движение материальной точки под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию r от притягивающего центра. Если в начальный момент поместить точку в близкое от центра силы положение и сообщить ей малую скорость, направление которой не проходит через центр силы, то она будет, как известно, совершать плоское движение. Принимая плоскость движения за плоскость координат x, y и беря начало координат в центре силы, будем иметь:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = \frac{\kappa}{2}r^2 = \frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2).$$

Так как коэффициенты в этих квадратичных функциях постоянны, то можем сразу же составить уравнения Лагранжа; получим

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0, \quad m\ddot{y} + \kappa y = 0. \tag{a}$$

Легко видеть, что характеристическое уравнение примет вид

$$(m\lambda^2 + \kappa)^2 = 0;$$

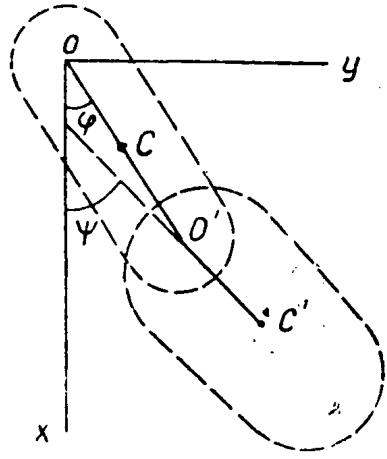
следовательно, $\lambda^2 = -\nu^2 = -\frac{\kappa}{m}$ будет кратным корнем этого уравнения. Это же значение ν^2 получается непосредственно из уравнений (а). Интегрируя эти уравнения, имеем:

$$x = H_1 \sin(\nu t + \varepsilon_1), \quad y = H_2 \sin(\nu t + \varepsilon_2),$$

где H_1, H_2, ε_1, ε_2 — постоянные интегрирования. Видим, что

в данном случае каждая координата выражается только через одно колебание, а не через два, как это было бы при простых корнях характеристического уравнения; кроме того, постоянные интегрирования входят в решение иначе, чем при простых корнях, ибо в последнем случае каждой частоте соответствует одна и та же начальная фаза ε и пропорциональные друг другу амплитуды колебаний, чего нет в полученном решении.

9. Двойной физический маятник. В качестве примера рассмотрим колебания двойного физического маятника, то есть тяжелой системы, состоящей из двух тел (фиг. 182), из которых одно может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O, а другое — вокруг параллельной оси O', неизменно связанной с первым телом. При этом будем считать, что центры тяжести обоих тел C и C' лежат в одной вертикальной плоскости, а ось O' пересекает продолжение прямой OC.



Фиг. 182

Обозначим через M массу первого тела, через m — массу второго; пусть $OO' = a$, $OC = h$, $O'C' = b$; обозначим также через i радиус инерции первого тела относительно оси O, через i' — радиус инерции второго тела относительно горизонтальной оси C', перпендикулярной плоскости колебаний маятника. За независимые обобщенные координаты примем углы φ и ψ, образуемые прямыми OC и $O'C'$ с вертикалью; такой выбор обеспечивает равенство нулю этих координат в положении устойчивого равновесия системы.

Кинетическая энергия системы есть

$$T = T_1 + T_2,$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} Mi^2\dot{\varphi}^2$$

есть кинетическая энергия первого тела, а

$$T_2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} I'\omega'^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} mi'^2\dot{\psi}^2$$

— кинетическая энергия второго тела, причем v' есть скорость центра масс C' этого тела. Так как координаты C' будут

$$x' = a\cos\varphi + b\cos\psi, \quad y' = a\sin\varphi + b\sin\psi, \tag{a}$$

то

$$\dot{x}' = -(a\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + b\sin\psi\cdot\dot{\psi}), \quad \dot{y}' = a\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + b\cos\psi\cdot\dot{\psi},$$

$$v'^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\psi}^2 + 2ab\cos(\psi - \varphi)\cdot\dot{\varphi}\,\dot{\psi}.$$

Поэтому

$$T_2 = \frac{m}{2}\{a^2\dot{\varphi}^2 + (b^2 + i'^2)\dot{\psi}^2 + 2ab\cos(\psi - \varphi)\cdot\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\},$$

а полная кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{1}{2}\{(Mi^2 + ma^2)\dot{\varphi}^2 + m(b^2 + i'^2)\dot{\psi}^2 + 2mab\cos(\psi - \varphi)\cdot\dot{\varphi}\dot{\psi}\}.$$

В соответствии с общей теорией малых движений нужно в этом выражении все коэффициенты при обобщенных скоростях заменить их значениями в положении равновесия. Полагая поэтому $\cos(\psi - \varphi) = 1$, берем выражение для T в виде

$$T = \frac{1}{2}\{(Mi^2 + ma^2)\dot{\varphi}^2 + m(b^2 + i'^2)\dot{\psi}^2 + 2mab\dot{\varphi}\dot{\psi}\}. \qquad (b)$$

Потенциальная энергия сил тяжести есть

$$V = -Mgx - mgx' + C,$$

где x — координата центра тяжести первого тела. Выбираем C из условия, что в положении равновесия, где $x = h$, $x' = a + b$, потенциальная энергия равна нулю; получим $C = Mgh + mg(a + b)$.

Подставляя это значение, находим:

$$V = \{M(h - x) + m(a + b - x')\}g.$$

Переходя к независимым координатам, имея в виду, что $x = h\cos\varphi$ и используя (a), получаем:

$$V = \{Mh(1 - \cos\varphi) + ma(1 - \cos\varphi) + mb(1 - \cos\psi)\}g.$$

Это выражение согласно общей теории мы должны заменить его разложением в ряд Маклорена, отбрасывая члены выше второго порядка относительно переменных. Тогда косинусы заменятся по формулам вида

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

что дает для V:

$$V = \frac{1}{2}\{(Mh + ma)\varphi^2 + mb\psi^2\}g. \qquad (c)$$

Пользуясь выражениями (b) и (c), составляем уравнения Лагранжа; получим

$$(Mi^2 + ma^2)\ddot{\varphi} + mab\ddot{\psi} + (Mh + ma)g\varphi = 0,$$

$$(b^2 + i'^2)\ddot{\psi} + ab\ddot{\varphi} + bg\psi = 0.$$

Деля второе уравнение на b и вводя обозначения

$$\frac{Mi^2 + ma^2}{Mh + ma} = \kappa, \qquad \frac{b^2 + i'^2}{b} = l,$$

можем эти уравнения переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}(Mh + ma)(\kappa\ddot{\varphi} + g\varphi) + mab\ddot{\psi} = 0,\\ a\ddot{\varphi} + l\ddot{\psi} + g\psi = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

Так как в данном случае мы заранее знаем, что движение системы будет иметь вид малых колебаний, то частное решение этой системы можно искать в виде простых гармонических колебаний

$$\varphi = A\sin(\nu t + \varepsilon), \quad \psi = B\sin(\nu t + \varepsilon).$$

Подставляя эти значения в (d), приходим к следующим уравнениям для коэффициентов A и B:

$$\left.\begin{aligned}(Mh+ma)(g-\kappa\nu^2)A-mab\nu^2B=0,\\ -a\nu^2A+(g-l\nu^2)B=0.\end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix}(Mh+ma)(g-\kappa\nu^2), & -mab\nu^2\\ -a\nu^2 \quad , & g-l\nu^2\end{vmatrix}=0$$

или

$$(Mh+ma)(g-\kappa\nu^2)(g-l\nu^2)-ma^2b\nu^4=0.$$

Корни этого уравнения дают два значения квадратов частот ν_1^2 и ν_2^2. Для каждого из них второе уравнение (e) дает соотношение для коэффициентов

$$B_i=\frac{a\nu_i^2}{g-l\nu_i^2}A_i \quad (i=1,\ 2).$$

Тогда общее решение задачи можно записать в виде

$$\varphi=A_1\sin(\nu_1t+\varepsilon_1)+A_2\sin(\nu_2t+\varepsilon_2),$$

$$\psi=\frac{a\nu_1^2}{g-l\nu_1^2}A_1\sin(\nu_1t+\varepsilon_1)+\frac{a\nu_2^2}{g-l\nu_2^2}A_2\sin(\nu_2t+\varepsilon_2),$$

где A_1, A_2, ε_1, ε_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, оказалось, что движение маятника можно рассматривать как полученное в результате наложения друг на друга двух главных колебаний с частотами ν_1 и ν_2.

§ 45. Устойчивость движения

1. Постановка задачи об устойчивости движения системы. Решая какую-либо задачу динамики, мы получаем решение, отвечающее заданным силам и начальным условиям движения. Это решение дает вполне определенное движение рассматриваемой системы.

Может, однако, случиться что начальные данные задачи в действительности несколько отклоняются от принятых в решении; например, начальная скорость снаряда, ракеты, самолета и т. д. всегда оказывается не совпадающей точно с расчетной. Кроме того, во время движения данной системы могут появиться мгновенные или временно действующие силы, не учтенные при решении задачи; так, на движение летящего в земной атмосфере тела оказывают влияние порывы ветра, изменения в значении силы сопротивления воздуха, вызванные отклонениями плотности от расчетной, а также изменения других сил.

Второй случай можно свести к первому, если в качестве начального момента взять момент прекращения действия дополнительно появившейся силы.

Называя движение, отвечающее полученному решению, *невозмущенным* движением системы, мы будем иметь некоторое другое *возмущенное* движение, происходящее при тех

же силах, но измененных начальных условиях. Для практических целей важно, чтобы при достаточно малых отклонениях в начальных данных возмущенное движение оказалось бы близким к невозмущенному в некотором определенном смысле: как увидим далее, движение, близкое к невозмущенному в одном смысле, может оказаться неблизким в другом. Если это требование выполнено, то невозмущенное движение называется устойчивым в принятом смысле, в противном случае — неустойчивым в этом же смысле.

Вопросами устойчивости движения занимались многие крупнейшие ученые. Из трудов этих ученых фундаментальное значение имеют работы замечательного русского ученого А. М. Ляпунова, особенно его капитальный труд „Общая задача об устойчивости движения" (1892). Его научные идеи и методы лежат в основе современной теории устойчивости и до сих пор служат базой дальнейших исследований в этой области.

2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения. Будем рассматривать движение системы, подчиненной идеальным и голономным связям, находящейся под действием консервативных сил. Тогда дифференциальные уравнения движения системы можно взять в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{a}$$

где L — функция Лагранжа, зависящая от независимых координат q_r, обобщенных скоростей $\dot{q}_r$ и времени t.

Уравнения (a) являются системой s дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $q_r(t)$. Если к этим уравнениям присоединить уравнения

$$\frac{dq_r}{dt} = \dot{q}_r \quad (r = 1, 2, \ldots, s) \tag{b}$$

и рассматривать обобщенные скорости $\dot{q}_r$ как тоже некоторые независимые функции от t, то уравнения (a) и (b) образуют систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно $2s$ функций q_r и $\dot{q}_r$. Сведение дифференциальных уравнений движения системы к уравнениям первого порядка можно сделать и иным путем, как это будет видно в дальнейшем на примере канонических уравнений.

Уравнения (a) линейны относительно вторых производных от q_r, то есть относительно первых производных от $\dot{q}_r$; поэтому их легко разрешить относительно этих производных. Учитывая еще, что уравнения (b) уже разрешены относи-

тельно производных от q_r, можем дифференциальные уравнения движения системы представить в форме уравнений первого порядка вида

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{c}$$

где $n = 2s$, $z_i = z_i(t)$ — обобщенные координаты и обобщенные скорости, Z_i — некоторые функции своих аргументов. При использовании другой системы дифференциальных уравнений движения в уравнениях (c) функции $z_i(t)$ могут иметь другой смысл. Если некоторыми из величин z_i можно пренебречь, то в системе (c) n окажется меньше, чем $2s$.

Пусть теперь известно частное решение системы (c):

$$z_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{d}$$

при начальных условиях

$$z_i = f_i(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

определяющее то невозмущенное движение, устойчивость которого нужно исследовать.

Будем искать другое решение системы (c):

$$z_i = f_i(t) + x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{e}$$

определяющее некоторое возмущенное движение системы, отвечающее измененным начальным условиям

$$z_i = f_i(0) + x_i(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь $x_i(t)$ — отклонения значений $z_i(t)$ в возмущенном движении от их значений в невозмущенном, а $x_i(0)$ — начальные значения отклонений, называемые *начальными возмущениями* или просто *возмущениями*.

Подставляя в уравнения (c) сначала функции (e), а затем функции (d) и вычитая из результатов первой подстановки результаты второй, придем к уравнениям для отклонений $x_i(t) = z_i(t) - f_i(t)$:

$$\frac{dx_i}{dt} = Z_i(f_1 + x_1, f_2 + x_2, \ldots, f_n + x_n, t) - Z_i(f_1, f_2, \ldots, f_n, t).$$

Так как функции $f_i(t)$ известны, то правые части этих уравнений будут функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Обозначая эти функции через X_i, то есть полагая

$$Z_i(f_1 + x_1 f_2 + x_2, \ldots f_n + x_n, t) - Z_i(f_1, f_2, \ldots, f_n, t) = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \tag{f}$$

придем к уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Эти дифференциальные уравнения для отклонений $x_i(t)$ в возмущенном движении называются *уравнениями возмущенного движения системы.*

Из выражений (f) следует, что функции X_i обладают тем свойством, что при любом t и отклонениях, равных нулю, они тождественно равны нулю, то есть

$$X_i(0, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0. \tag{2}$$

Равенство нулю всех отклонений x_i дает невозмущенное движение. Поэтому, с математической точки зрения, вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы оказывается эквивалентным вопросу об устойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений (1) возмущенного движения.

3. Понятие устойчивости движения системы по Ляпунову. Будем рассматривать устойчивость движения системы в том смысле, который дал ей Ляпунов. Этот смысл определяется следующими положениями:

1) *Невозмущенное движение системы называется устойчивым по Ляпунову, если для всякого наперед заданного положительного числа* ε *(в том числе сколь угодно малого) можно указать такое положительное число* $\delta < \varepsilon$, *что при возмущениях, удовлетворяющих неравенствам*

$$|x_i(0)| < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

последующее возмущенное движение будет таково, что в любой момент времени будут выполняться неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

2) *Если, кроме того, все отклонения стремятся с течением времени к нулю, то есть если*

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0,$$

то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым по Ляпунову.

3) *Невозмущенное движение системы называется неустойчивым по Ляпунову, если можно указать такое число* $\varepsilon > 0$, *что при сколь угодно малом* $\delta < \varepsilon$ *и начальных условиях* $|x_i(0)| < \delta$ *в последующем возмущенном движении в некоторый момент времени хотя бы для одного отклонения выполнится равенство* $|x_i(t)| = \varepsilon$.

Дадим введенным понятиям геометрическую иллюстрацию. С этой целью введем n-мерное пространство координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$; назовем его *фазовым пространством.* Возмущенное движение системы представится движением некоторой изображающей точки M в этом пространстве. Положение точки M будет характеризовать не какое-то поло-

жение системы, а лишь ее отклонение от невозмущенного движения, причем последнему будет отвечать начало координат. Отличием фазового пространства от обычного является и то, что в число его координат входят не только отклонения собственно координат от их значений в невозмущенном движении, но и отклонения обобщенных скоростей или заменяющих их величин.

Построим в этом пространстве куб с гранями

$$|x_i| = \varepsilon;$$

назовем его ε-кубом. Тогда невозмущенное движение системы будет устойчивым по Ляпунову, если внутри ε-куба можно построить такой куб $|x_i| \leqslant \delta$ (δ-куб), что при любом начальном положении изображающей точки M внутри δ-куба эта точка двигалась бы в дальнейшем все время внутри ε-куба, никогда не достигая его границ, сколь бы ни было мало ε.

Если, кроме того, при своем движении точка M будет асимптотически приближаться к общему центру кубов, то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Наконец, если при сколь угодно малом δ всегда найдется внутри δ-куба хотя бы одно начальное положение точки M, при котором она в своем дальнейшем движении в какой-нибудь момент времени достигнет поверхности ε-куба, то невозмущенное движение системы будет неустойчивым по Ляпунову.

Возьмем, например, невозмущенное движение, состоящее из вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω. Принимая за независимую координату угол φ поворота тела, имеем для этого движения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Пусть возмущенным движением является какое-то неравномерное вращение, для которого

$$\varphi = \varphi_1(t), \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1(t).$$

Тогда отклонение возмущенного движения от невозмущенного будет характеризоваться двумя величинами:

$$x_1 = \varphi_1 - \varphi_0 - \omega t, \quad x_2 = \dot{\varphi}_1 - \omega.$$

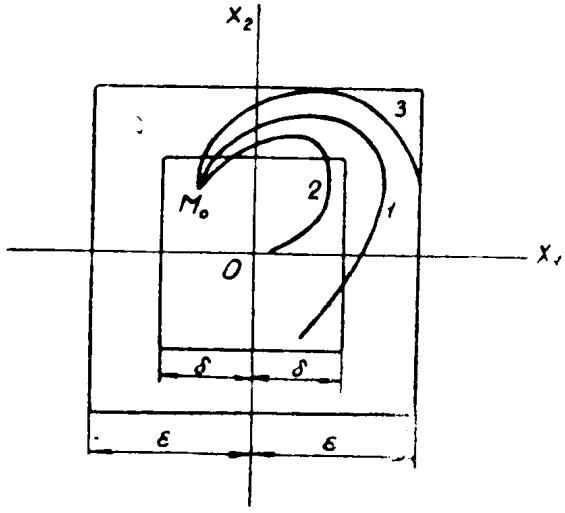
В данном случае получаем фазовую плоскость координат x_1x_2 (фиг. 183), в которой начало координат O отвечает равномерному вращению тела с угловой скоростью ω=const.

Если возмущенное движение таково, что из своего начального положения M_0 внутри δ-квадрата изображающая точка M движется по кривой l, нигде не достигающей границ ε-ква-

драта, то заданное равномерное вращение будет устойчивым по Ляпунову.

Если же движение точки M происходит по кривой *2,* тоже не достигающей границ ε-квадрата, и, если, кроме того, с течением времени движущаяся по ней изображающая точка будет неограниченно приближаться к началу координат, то равномерное вращение будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Если же, как бы ни было мало δ, M_0 оказывается таким начальным положением, что последующее движение точки M происходит по кривой *3,* двигаясь по которой точка M в некоторый момент времени достигнет границы ε-квадрата, то равномерное вращение будет неустойчивым по Ляпунову.



Фиг. 183

В заключение заметим, что определение устойчивости по Ляпунову не единственно возможное. Пусть, например, точка движется по некоторой замкнутой орбите S_0. Тогда, если возмущенными движениями являются движения точки по орбитам S, сколь угодно близким к орбите S_0, то невозмущенное движение точки может быть названо орбитально устойчивым. Однако оно не будет устойчивым по Ляпунову, ибо для устойчивости по Ляпунову нужно еще потребовать, чтобы в любой момент времени координаты точки на всякой орбите S и ее скорости сколь угодно мало отличались от их значений на орбите S_0 в тот же момент времени.

4. Функция Ляпунова. Ляпунов дал два метода решения задач об устойчивости движения. Однако первый метод, основанный на представлении решений уравнений воз-

мущенного движения (1) в виде бесконечных рядов, оказался мало удобным, требующим громоздких вычислений и применимым только при некоторых частных видах уравнений (1). Поэтому основное значение приобрел второй метод (или «вторая метода»— по терминологии Ляпунова), дающий общие принципы решения задач об устойчивости движения во всех случаях и не связанный с разысканием решений уравнений возмущенного движения.

Этот метод основывается на применении некоторой функции V, называемой функцией Ляпунова. За эту функцию можно принять любую вещественную функцию отклонений x_i и времени t, удовлетворяющую некоторым условиям достаточно общего вида.

Ограничимся далее тем случаем, когда правые части уравнений (1) не содержат явно время t, то есть когда

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда и функцию V выбирают зависящей только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Полная производная от нее будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

что в силу уравнений (1) можно записать в виде

$$\dot{V} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i. \tag{5}$$

Функцию $\dot{V}$, определяемую этой формулой, будем называть *производной функции V, составленной в силу уравнений возмущенного движения.* Очевидно, что $\dot{V}$ будет зависеть тоже только от отклонений x_i.

Упомянутыми выше условиями для функции V являются следующие:

1) функции V и $\dot{V}$ должны тождественно обращаться в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то есть

$$V(0, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad \dot{V}(0, 0, \ldots, 0) \equiv 0;$$

2) существует область изменения всех отклонений

$$|x_i| \leqslant H,$$

в которой обе функции остаются непрерывными и однозначными при всех значениях переменных.

Называя последнюю область H-кубом, будем в дальнейшем рассматривать только такие области значений отклонений x_i, которые не выходят из этого куба.

В остальном выбор функции V совершенно произволен. Обычно ее берут в виде однородного многочлена некоторой степени относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если функция V (или $\dot{V}$) такова, что в H-кубе она может получать значения только одного определенного знака, а

также значения, равные нулю, то она называется *знакопостоянной* (положительной или отрицательной) в H-кубе.

Если же в этом кубе функция может получать значения любого знака, то она называется *знакопеременной* в H-кубе.

Наконец, если знакопостоянная в H-кубе функция может обращаться в нуль только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то она называется *знакоопределенной* в H-кубе.

Так, например, функция $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$ будет знакопостоянной, а функция $x_1^\kappa + x_2^\kappa + \ldots + x_n^\kappa$ — знакоопределенной при четном κ и знакопеременной при нечетном κ.

Вектор n-мерного пространства grad V направлен по нормали к гиперповерхности $V = \text{const}$ в сторону возрастания V. Если ввести еще вектор $\boldsymbol{u}$ скорости изображающей точки, имеющий проекции

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

то равенство (5) можно переписать в виде

$$\dot{V} = \text{grad } V \cdot \boldsymbol{u} = |\text{grad } V| \cdot u_n, \qquad (6)$$

где u_n — проекция скорости изображающей точки на указанную нормаль.

5. Первая и вторая теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Первая теорема дает достаточное условие устойчивости невозмущенного движения системы. Она гласит:

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение системы устойчиво.

Дадим чисто геометрическое доказательство.

Для определенности предположим, что V — положительная знакоопределенная функция, тогда $\dot{V}$ будет отрицательной знакопостоянной. Так как в начале координат фазового пространства $V = 0$, а в некоторой его окрестности (в H-кубе) $V > 0$, то будет существовать внутри H-куба такой ε_0-куб ($\varepsilon_0 < H$), внутри которого при удалении от начала координат функция V будет только возрастать. Тогда при значениях x_i, при которых $|x_i| < \varepsilon_0$, уравнение $V = C = \text{const}$ представляет собой уравнение некоторой замкнутой гиперповерхности, внутри которой находится начало координат; при этом, если $C_1 < C_2$, то поверхность $V = C_1$ лежит внутри поверхности $V = C_2$.

Из (6) имеем:

$$u_n = \frac{1}{|\text{grad } V|} \dot{V}.$$

что по условию теоремы относительно $\dot{V}$ дает

$$u_n \leqslant 0 \text{ или } u_n \equiv 0.$$

При $u_n < 0$ изображающая точка пересекает при своем движении всякую поверхность $V=C$ извне внутрь, а при $u_n = 0$ остается на такой поверхности.

Возьмем теперь ε-куб, лежащий внутри ε_0-куба. Возьмем далее поверхность $V=C_0$, целиком лежащую внутри ε-куба и впишем в нее δ-куб. Тогда изображающая точка, находившаяся в момент $t=0$ в δ-кубе, будет двигаться по траектории, которая может пересекать каждую поверхность $V=C$ только извне внутрь; поэтому она не может попасть на поверхность $V=C_0$, и тем более не сможет достичь границ ε-куба. Тем самым теорема доказана.

При своем движении изображающая точка может достичь места, в котором $u_n = 0$, после чего она может остановиться на соответствующей поверхности $V=C$, и дальнейшее приближение к началу координат может стать невозможным. Следовательно, первая теорема гарантирует только простую устойчивость невозмущенного движения. Об асимптотической же устойчивости говорит вторая теорема Ляпунова:

Если в условиях первой теоремы производная $\dot{V}$, составленная в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения, будет функцией знакоопределенной противоположного знака с V, то невозмущенное движение системы асимптотически устойчиво.

В этом случае $\dot{V}$ обращается в нуль только в начале координат, а вне его всюду $\dot{V} < 0$, что дает везде $u_n < 0$. Поэтому изображающая точка не может оставаться ни на одной поверхности $V=C$ и будет пересекать каждую из них извне внутрь, неограниченно приближаясь к началу координат, что и свидетельствует об асимптотической устойчивости невозмущенного движения.

Пример 1. Определить устойчивость невозмущенного движения системы, если уравнения возмущенного движения будут

$$\dot{x} = y - 3z - x(y-2z)^2, \quad \dot{y} = -2x + 3z - 3yz, \quad \dot{z} = 2x - y + y^2 \quad \text{(а)}$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде знакоопределенной положительной функции

$$V = 2x^2 + y^2 + 3z^2.$$

Тогда

$$\frac{dV}{dt} = 4x\dot{x} + 2y\dot{y} + 6z\dot{z}.$$

Подставляя значения $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ из уравнений (а), находим:

$$\dot{V} = 4xy - 12xz - 4x^2(y-2z)^2 - 4xy + 6yz - 6y^2z + \\ + 12xz - 6yz + 6y^2z = -4x^2(y-2z)^2.$$

Так как $\dot{V} \leqslant 0$, причем знак равенства имеет место в начале координат и в плоскостях $x=0$ и $y=2z$, то $\dot{V}$ будет знакопостоянной отрицатель-

ной функцией. Следовательно, невозмущенное движение системы будет устойчивым по Ляпунову.

Пример 2. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y - z + 3x(6x^2 + 5y^2 + 2z^2); \\ \dot{y} &= -2x - 5y + z + 5y(6x^2 + 5y^2 + 2z^2); \\ \dot{z} &= 2x - y - 2z + 2z(6x^2 + 5y^2 + 2z^2). \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Функцию Ляпунова берем в виде

$$V = 2x^2 + y^2 + z^2;$$

она будет знакоопределенной положительной функцией.

Имеем производную

$$\frac{dV}{dt} = 4x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z},$$

откуда получаем производную, составленную в силу уравнений (b) возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -12x^2 + 4xy - 4xz + 12x^2(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) + \\ &- 4xy - 10y^2 + 2yz + 10y^2(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) + \\ &+ 4xz - 2yz - 4z^2 + 4z^2(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) = \\ &= -(12x^2 + 10y^2 + 4z^2)(1 - 6x^2 - 5y^2 - 2z^2). \end{aligned}$$

Видим, что $\dot{V}$ есть знакоопределенная отрицательная функция в области

$$6x^2 + 5y + 2z^2 < 1$$

или

$$x^2 + \frac{5}{6}y^2 + \frac{1}{3}z^2 < \frac{1}{6}.$$

Это неравенство тем более будет выполняться, если взять область

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \frac{1}{6}.$$

Следовательно, в качестве H-куба, в котором определяются функции V и $\dot{V}$, можно взять куб $|x_i| = H = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Так как в этом кубе эти функции являются знакоопределенными различного знака, то по второй теореме Ляпунова невозмущенное движение системы асимптотически устойчиво.

6. Третья теорема Ляпунова о неустойчивости движения. Об условиях, при которых невозмущенное движение системы оказывается неустойчивым, говорит третья теорема Ляпунова:

Если можно определить обращающуюся в нуль в начале координат функцию V, принимающую в некоторой области S, примыкающей к началу координат, значения того же знака, что и ее производная $\dot{V}$, составленная в силу дифференциальных уравнений движения, а сама эта производная является знакоопределенной функцией, то невозмущенное движение системы неустойчиво.

По условиям теоремы существует такой H-куб, в котором всюду, кроме начала координат, можно считать $\dot{V} > 0$,

и имеется примыкающая к началу координат область S, в которой $V>0$ и в которой эта функция при удалении от начала координат, где $V=0$, будет обязательно возрастать. Поэтому поверхности $V=C$ по мере возрастания C должны в этой области удаляться от начала координат.

Пусть начальное положение M_0 изображающей точки находится внутри S на некоторой поверхности $V=C_0$. Из $\dot{V}>0$ следует, согласно (6), $u_n>0$; поэтому при дальнейшем движении изображающей точки она будет пересекать каждую поверхность $V=C$ в направлении возрастания V, удаляясь тем самым от начала координат. Тогда всегда найдется такое положительное число ε, что изображающая точка в некоторый момент времени достигнет границы ε-куба, что и доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

Пример. Определить характер устойчивости невозмущенного движения, если имеется только одно уравнение возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt}=ax^k,$$

где k— целое положительно число.

Если k нечетно, то функцию V возьмем в виде

$$V=\frac{1}{2}x^2;$$

тогда

$$\dot{V}=x\dot{x}=ax^{k+1}.$$

Видим, что $\dot{V}$ — знакоопределенная положительная функция, а $\dot{V}$ — знакоопределенная, положительная при $a>0$ и отрицательная при $a<0$. Следовательно, невозмущенное движение в первом случае по третьей теореме Лупянова неустойчиво, а во втором (по второй теореме) — асимптотически устойчиво.

Если же k четно, то берем

$$V=x.$$

Получим

$$\dot{V}=\dot{x}=ax^k.$$

Видим, что V в данном случае будет функцией знакопеременной, а $\dot{V}$ — знакоопределенной знака, совпадающего со знаком a. Так как в одной из областей $x>0$ или $x<0$ знак $\dot{V}$ совпадет со знаком V, то по третьей теореме Ляпунова невозмущенное движение окажется неустойчивым.

7. Случай линейности уравнений возмущенного движения. Рассмотрим частный случай, когда в уравнениях (1) возмущенного движения системы правые части не зависят явно от t и являются линейными однородными функциями отклонений x_i. В таком случае уравнения будут иметь вид:

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (7)$$

где все a_{ik} постоянны.

Частное решение такой системы, как обычно, ищем в форме

$$x_i = A_i e^{\lambda t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подстановка этих выражений в уравнения (7) дает следующую систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов A_i:

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 + \ldots + a_{1n} A_n = 0; \\ &a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 + \ldots + a_{2n} A_n = 0; \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &a_{n1} A_1 + a_{n2} A_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) A_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных, дает характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

являющееся уравнением n-той степени относительно λ. Найдя все корни $\lambda_\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$ и определив отвечающие им значения коэффициентов $A_{i\kappa} = A_i(\lambda_\kappa)$, можем общее решение системы (7) представить в виде

$$x_i = \sum_{\kappa=1}^{n} A_{i\kappa} e^{\lambda_\kappa t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

что отвечает, как известно, тому случаю, когда все корни λ_κ простые; этим случаем мы и ограничимся в дальнейшем.

Для комплексных корней уравнения (9) члены решения (10), отвечающие двум сопряженным корням, могут быть представлены в виде произведения множителя $e^{\mu_\kappa t}$ на некоторое простое гармоническое колебание, причем μ_κ являются вещественными частями указанных корней. Для чисто мнимых сопряженных корней $\mu_\kappa = 0$ и остается лишь одно гармоническое колебание. Таким образом, будут возможны следующие частные случаи:

1. Если корни характеристического уравнения (9) комплексны и имеют отрицательные вещественные части или же вещественны и отрицательны, то все отклонения x_i окажутся ограниченными и при t, стремящемся к бесконечности, устремятся к нулю; следовательно, невозмущенное движение системы будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

2. Часть корней чисто мнима, а остальные имеют отрицательные вещественные части или же вещественны и отри-

цательны; тогда члены решения (10), отвечающие мнимым корням, будут иметь вид гармонических колебаний, остающихся ограниченными во все время, а все остальные члены будут с возрастанием времени стремиться к нулю; поэтому невозмущенное движение системы устойчиво по Ляпунову.

3. Среди корней уравнения (9) имеется хотя бы одна пара комплексных сопряженных корней с положительной вещественной частью или хотя бы один вещественный и положительный корень; тогда соответствующий член решения (10) будет неограниченно возрастать по модулю с течением времени, и, следовательно, невозмущенное движение системы будет неустойчивым по Ляпунову.

4. Если имеются нулевые корни, то отвечающие им члены решения (10) будут равны постоянным A_{ik} и поэтому будут ограничены; характер невозмущенного движения системы будет тогда определяться остальными корнями; например, если они вещественны и отрицательны или же комплексны и имеют отрицательные или равные нулю вещественные части, то невозмущенное движение будет устойчивым по Ляпунову.

Уравнение (9) представляет собой алгебраическое уравнение степени n относительно λ. Поэтому разыскание его корней, особенно при больших n, представляет значительные трудности. Некоторую помощь в оценке характера корней может оказать теорема, данная Гурвицем, которую мы приведем без доказательства.

В раскрытом виде уравнение (9) можно записать в форме

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad \text{(а)}$$

где, не нарушая общности рассуждений, можем считать $a_0 > 0$.

Тогда теорема Гурвица говорит о следующем:

Для того, чтобы все корни уравнения (а) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы определители*

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & \ldots & a_k & & \end{vmatrix}, \ldots,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$ *и при* $j > n$ *нужно положить* $a_j = 0$, *были бы положительны.*

Например, для $n=4$ должны выполняться условия

$$D_1=a_1>0,\quad D_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}>0,\quad D_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & a_4 & a_3\end{vmatrix}>0,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\ 0 & a_4 & a_3 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}>0.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде $a_4D_3>0$, что дает $a_4>0$. Раскрывая остальные определители, получаем условия Гурвица в данном случае:

$$a_1>0,\quad a_1a_2-a_3a_0>0,\quad a_3(a_1a_2-a_3a_0)-a_4a_1^2>0,\quad a_4>0.$$

Из третьего и четвертого условия имеем

$$a_3(a_1a_2-a_3a_0)>a_4a_1^2>0,$$

что в силу второго условия дает $a_3>0$. Таким образом, окончательно условия Гурвица для $n=4$ будут:

$$a_1>0,\quad a_3>0,\quad a_4>0,\quad a_3(a_1a_2-a_3a_0)-a_4a_1^2>0.$$

8. Определение устойчивости по первому приближению. Возьмем уравнения (1) возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

считая правые части независящими явно от t, и разложим эти части в ряды Маклорена по всем переменным. Тогда, учитывая, что $X_i(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)\equiv 0$, получим:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}x_\kappa+\tilde{X}_i(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\qquad (11)$$

где $a_{i\kappa}=\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_\kappa}\right)_0$ — постоянные значения производных при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, а $\tilde{X}_i$ — старшие члены разложения, начиная со второго порядка относительно переменных x_κ.

Можно теперь поставить вопрос, нельзя ли при исследовании устойчивости отбросить нелинейные члены $\tilde{X}_i$, заменив (11) линейными уравнениями вида (7), то есть уравнениями первого приближения. О результатах такого решения задачи говорят как об устойчивости или неустойчивости движения системы по первому приближению.

Ответ на поставленный вопрос можно получить из нижеследующих рассуждений.

Для уравнений первого приближения мы можем искать решение задачи в том же виде, как и в предыдущем случае. Беря уравнения (8), записанные для коэффициентов $A_{i\kappa}$, отвечающих корню λ_κ уравнения (9),

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{j\kappa} = \lambda_\kappa A_{i\kappa} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

умножим каждое из них на коэффрциент A_{ih}, отвечающий другому корню λ_h, и результаты сложим; получим:

$$\sum_{i,j} a_{ij}A_{j\kappa}A_{ih} = \lambda_\kappa \sum_{i} A_{i\kappa}A_{ih}.$$

Записывая же уравнения (8) для коэффициентов A_{jh}, отвечающих корню λ_h, умножая их на коэффициенты $A_{i\kappa}$ и опять складывая, придем к равенству

$$\sum_{i,j} a_{ij}A_{jh}A_{i\kappa} = \lambda_h \sum_{i} A_{ih}A_{i\kappa}.$$

Получили два линейных относительно λ уравнения с одними и теми же коэффициентами. Поэтому эти уравнения выполняются при неравных нулю коэффициентах только тогда, когда $h = \kappa$; если же $h \neq \kappa$, то коэффициенты равны нулю. Следовательно,

$$\lambda_\kappa = \frac{\sum_{i,j} a_{ij}A_{i\kappa}A_{j\kappa}}{\sum_{i} A_{i\kappa}^2}$$

и при $h \neq \kappa$

$$\sum_{i,j} a_{ij}A_{j\kappa}A_{ih} = 0, \quad \sum_{i} A_{i\kappa}A_{ih} = 0.$$

Так как

$$A_{i\kappa} = C_\kappa \Delta_{i\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

где C_κ — произвольные постоянные, а $\Delta_{i\kappa} = \Delta_i(\lambda_\kappa)$ — алгебраические дополнения для элементов какой-либо строки определителя (9), вычисленные при $\lambda = \lambda_\kappa$, то эти равенства можно еще переписать в виде

$$\lambda_\kappa = \frac{\sum_{i,j} a_{ij}\Delta_{i\kappa}\Delta_{j\kappa}}{\sum_{i} \Delta_{i\kappa}^2} \qquad \text{(a)}$$

и при $h \neq \kappa$

$$\sum_{i,j} a_{ij}\Delta_{j\kappa}\Delta_{ih} = 0, \quad \sum_{i} \Delta_{i\kappa}\Delta_{ih} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Аналогично методу определения главных координат в задаче о малых колебаниях системы, введем новые переменные z_κ соотношениями

$$x_i = \sum_\kappa \Delta_{i\kappa} z_\kappa.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (11), находим:

$$\sum_\kappa \Delta_{i\kappa} \dot{z}_\kappa = \sum_\kappa a_{i\kappa} \sum_j \Delta_{\kappa j} z_j + \tilde{Z}_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножим каждое из этих уравнений на Δ_{ih} и сложим; переставляя еще порядок суммирования, результат можем записать в виде

$$\sum_\kappa \dot{z}_\kappa \sum_i \Delta_{i\kappa}\Delta_{ih} = \sum_j z_j \sum_{i,\kappa} a_{i\kappa}\Delta_{ih}\Delta_{\kappa j} + \sum_i \Delta_{ih}\tilde{Z}_i.$$

Согласно равенств (b) внутренние суммы отличны от нуля лишь при $\kappa = h$ и $j = h$ соответственно. Поэтому получим:

$$\dot{z}_h \sum_i \Delta_{ih}^2 = z_h \sum_{i,\kappa} a_{i\kappa}\Delta_{ih}\Delta_{\kappa h} + \sum_i \Delta_{ih}\tilde{Z}_i.$$

Деля уравнения на коэффициент при $\dot{z}_h$, используя равенство (a) и изменяя индекс, приходим к следующим дифференциальным уравнениям возмущенного движения в новых переменных

$$\frac{dz_\kappa}{dt} = \lambda_\kappa z_\kappa + Z_\kappa(z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(c)}$$

где Z_κ — функции, содержащие члены только не ниже второго порядка относительно переменных z_κ.

Как видим, уравнениями возмущенного движения первого приближения в новых переменных будут уравнения

$$\frac{dz_\kappa}{dt} = \lambda_\kappa z_\kappa. \qquad \text{(d)}$$

Корни λ_κ уравнения (9) могут быть как вещественными, так и комплексными. Тогда каждой паре сопряженных комплексных корней $\lambda_\kappa = \mu_\kappa \pm i\nu_\kappa$ будет отвечать согласно уравнениям (d) пара сопряженных комплексных значений $z_\kappa = \xi_\kappa \pm i\eta_\kappa$ в решении уравнений первого приближения. При этом

$$\lambda_\kappa z_\kappa = (\mu_\kappa \pm i\nu_\kappa)(\xi_\kappa \pm i\eta_\kappa) = \mu_\kappa\xi_\kappa - \nu_\kappa\eta_\kappa \pm i(\mu_\kappa\eta_\kappa + \nu_\kappa\xi_\kappa). \qquad \text{(e)}$$

Вещественным же корням λ_κ будут отвечать тоже вещественные значения z_κ.

Ограничимся рассмотрением того случая, когда этими свойствами будет обладать и решение точных уравнений (c)

возмущенного движения, хотя окончательный результат будет справедлив и при невыполнении этого условия. Для получения общих записей будем вещественные корни рассматривать как комплексные, для которых только $\nu_\kappa = 0$ и $\eta_\kappa = 0$. Поэтому, полагая $z_\kappa = \xi_\kappa \pm i\eta_\kappa$ и делая замену по (e), можем уравнения (c) после отделения вещественных и мнимых частей переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_\kappa}{dt} &= \mu_\kappa \xi_\kappa - \nu_\kappa \eta_\kappa + \Phi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m), \\ \frac{d\eta_\kappa}{dt} &= \mu_\kappa \eta_\kappa + \nu_\kappa \xi_\kappa + \Psi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \\ &(\kappa = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \quad \text{(f)}$$

где $m = n$, если все λ_κ вещественны и $m < n$, если имеются комплексные λ_κ; для вещественных корней $\nu_\kappa = 0$, $\eta_\kappa = 0$, и вторые уравнения (f) будут отсутствовать.

Возьмем теперь функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{m} \mu_\kappa (\xi_\kappa^2 + \eta_\kappa^2).$$

Пользуясь уравнениями (f), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu_\kappa(\xi_\kappa^2 + \eta_\kappa^2)\right] = \mu_\kappa\left(\xi_\kappa \frac{d\xi_\kappa}{dt} + \eta_\kappa \frac{d\eta_\kappa}{dt}\right) =$$

$$= \mu_\kappa[\xi_\kappa(\mu_\kappa\xi_\kappa - \nu_\kappa\eta_\kappa) + \eta_\kappa(\mu_\kappa\eta_\kappa + \nu_\kappa\xi_\kappa) + \xi_\kappa\Phi_\kappa + \eta_\kappa\Psi_\kappa] =$$

$$= \mu_\kappa^2(\xi_\kappa^2 + \eta_\kappa^2) + \mu_\kappa(\xi_\kappa\Phi_\kappa + \eta_\kappa\Psi_\kappa).$$

Следовательно, производная от V по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения, будет

$$\dot{V} = \sum_{\kappa=1}^{m} \mu_\kappa^2(\xi_\kappa^2 + \eta_\kappa^2) + R,$$

где R есть та часть функции $\dot{V}$, которая содержит члены не ниже третьего порядка относительно ξ_κ и η_κ.

Если среди корней уравнения (9) нет чисто мнимых или равных нулю, то все μ_κ отличны от нуля, и при достаточно малых значениях переменных знак $\dot{V}$ определяется членами второго порядка; следовательно $\dot{V}$ будет знакоопределенной положительной функцией от переменных ξ_κ, η_κ. Это означает, что в этом случае устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения можно определять по уравнениям первого приближения.

Иначе обстоит дело в том случае, если имеется хотя бы один корень характеристического уравнения, равный нулю

или чисто мнимый. Пусть, например, таким корнем является λ_1. Тогда его вещественная часть $\mu_1 = 0$ и квадратичная часть функции $\dot{V}$, как и выражение для V, не содержит членов с ξ_1 и η_1. В таком случае знак функции $\dot{V}$ при равных нулю остальных переменных и изменяющихся ξ_1, η_1 будет определяться членами порядка выше второго. Отсюда вытекает неправомерность в данном случае определения устойчивости движения по уравнениям первого приближения.

В итоге приходим к выводу:

Если при отбрасывании в дифференциальных уравнениях возмущенного движения нелинейных членов получается такая линейная система уравнений, что характеристическое уравнение не имеет ни нулевых, ни чисто мнимых корней, то исследование устойчивости невозмущенного движения можно производить по первому приближению. Если же имеется хотя бы один такой корень, то устойчивость движения существенно зависит от вида нелинейных членов уравнений, и, следовательно, устойчивость движения нельзя определять по первому приближению.

Этот результат, впервые полученный Ляпуновым, сыграл важную роль в теории фигур равновесия, то есть поверхностей тел, образуемых вращающейся жидкой массой, частицы которой находятся под действием сил взаимодействия по закону всемирного тяготения. Среди возможных фигур равновесия были найдены грушевидные формы. Исследуя устойчивость таких фигур, английский ученый Дж. Дарвин нашел, что эти фигуры устойчивы. Ляпунов же вскрыл ошибку Дарвина, установив, что в этом случае нельзя определять устойчивость по первому приближению, что делал Дарвин. Прилагая свой метод, Ляпунов доказал неустойчивость грушевидных фигур, что соответствует имеющемуся опыту и данным астрономии.

Пример: Для уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x^3, \qquad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y^3$$

линеаризированная система будет

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x.$$

Исключение y дает уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,$$

имеющее решение

$$x = a \sin (t - t_0).$$

Следовательно,

$$y = -\frac{dx}{dt} = -a \cos (t - t_0).$$

Получили, что отклонения от невозмущенного движения изменяются по закону простого гармонического колебания, и выбором начальных данных всегда можно заключить эти отклонения в сколь угодно узкие границы. Это означает, что невозмущенное движение оказалось устойчивым по первому приближению.

Однако нетрудно видеть, что этот вывод ошибочен. В самом деле, в данном случае

$$a_{11} = 0, \qquad a_{12} = -1, \qquad a_{21} = 1, \qquad a_{22} = 0.$$

Поэтому характеристическое уравнение для уравнений первого приближения будет

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & -1 \\ 1, & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Так как оно имеет чисто мнимые корни $\lambda = \pm i$, то на характер устойчивости движения существенное влияние имеют нелинейные члены точных уравнений возмущенного движения.

Применяя второй метод Ляпунова, возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Отсюда имеем:

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(-y + \alpha x^3) + y(x + \alpha y^3) = \alpha(x^4 + y^4).$$

Видим, что функции V — знакоопределенная положительная, а функция $\dot{V}$ — тоже знакоопределенная, положительная при $\alpha > 0$ и отрицательная при $\alpha < 0$. Поэтому при $\alpha < 0$ по второй теореме Ляпунова невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ по третьей теореме — неустойчиво.

§ 46. Канонические уравнения

1. Канонические переменные и получение канонических уравнений. Пусть материальная точка начала движение из состояния покоя; тогда по теореме о количестве движения будем иметь

$$m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S},$$

где $\boldsymbol{S}$ — импульс приложенной к точке силы за время, протекшее от начала движения. Поэтому количество движения точки иногда называют импульсом движения или импульсом точки, а его проекции на оси декартовых координат $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ — импульсами, отвечающими координатам x, y, z соответственно. При этом, поскольку кинетическая энергия точки есть

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

имеем

$$m\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \qquad m\dot{y} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}, \qquad m\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}.$$

Последнее свойство обобщается на любые криволинейные координаты и любую систему материальных точек. Если T —

кинетическая энергия системы, выраженная в обобщенных независимых координатах, то величины

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

называются обобщенными импульсами, отвечающими каждый соответствующей координате q_r.

Будем рассматривать движение системы, подчиненной идеальным и голономным связям и находящейся под действием сил, имеющих потенциал. Как мы говорили (§ 45, п. 2), в этом случае в качестве дифференциальных уравнений движения можно взять систему $2s$ уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \qquad \dot{q}_r = \frac{dq_r}{dt} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$

относительно $2s$ функций времени q_r, $\dot{q}_r$, где $L = T - V$ есть функция Лагранжа, зависящая от q_r, $\dot{q}_r$ и, возможно, времени t. Переменные q_r, $\dot{q}_r$ называются переменными Лагранжа.

Можно, однако, получить дифференциальные уравнения движения первого порядка иного вида, беря вместо лагранжевых переменных координаты q_r и импульсы p_r. Эти последние переменные и получающиеся для них уравнения называются *каноническими*.

Для вывода канонических уравнений составим вариацию функции $L = L(q, \dot{q}, t)$; будем иметь:

$$\delta L = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r. \tag{a}$$

Второй член правой части можно преобразовать к виду:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r = \delta \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r - \sum \dot{q}_r \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right).$$

Подставляя это выражение в (а) и перегруппировывая члены, приходим к равенству:

$$\delta\left(-L + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\right) = -\sum \frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \sum \dot{q}_r \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right). \tag{b}$$

Перейдем в этом выражении к каноническим переменным. Заметим, что потенциальная энергия V не зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_r$: поэтому выражения (1) для обобщенных импульсов можно еще записать в виде

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

Тогда из уравнений Лагранжа (2) получим

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \dot{p}_r. \qquad \text{(c)}$$

Так как кинетическая энергия системы в независимых координатах согласно (36—14) есть

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2}\sum_{r,\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_r\dot{q}_\rho + \sum_{r=1}^{s} A_r\dot{q}_r + \frac{1}{2}A,$$

где зависящие от координат и времени коэффициенты определяются формулами (36—13), то подробная запись выражений (1) будет

$$p_r = \sum_{\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_\rho + A_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad \text{(d)}$$

Рассматривая эти равенства как линейные уравнения относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_\rho$ и меняя индекс, находим из них

$$\dot{q}_r = f_r(q, p, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, s) \qquad \text{(e)}$$

Нетрудно видеть, что такое решение всегда существует, ибо определитель, составленный из коэффициентов при $\dot{q}_\rho$ в уравнениях (d), всегда отличен от нуля. В самом деле, если бы этот определитель, имеющий вид

$$\begin{vmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1s} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2s} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss} \end{vmatrix},$$

был бы равен нулю, то система линейных однородных уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{s} A_{r\rho}\dot{q}_\rho = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s)$$

удовлетворялась бы значениями $\dot{q}_\rho$, неравными одновременно нулю; последние же уравнения являются уравнениями

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда вытекает, что однородная существенно положительная квадратичная функция T_2, которая согласно теореме Эйлера удовлетворяет равенству

$$2T_2 = \sum \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r,$$

обращалась бы в нуль при значениях $\dot{q}_r$, не всех равных нулю. Так как последнее невозможно, то определитель отличен от нуля, что и требовалось доказать.

Функцию канонических переменных, в которую после подстановки $\dot{q}_r$ из (e) переходит выражение, стоящее под знаком δ в левой части равенства (b), обозначим через $H(q, p, t)$. Таким образом,

$$H(q, p, t) = \left(-L + \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r\right)_{\dot{q} \to p}. \qquad (4)$$

Эта функция H называется *функцией Гамильтона*. Подставляя еще выражения (3) и (c) в правую часть равенства (b), находим

$$\delta H = -\sum \dot{p}_r \delta q_r + \sum \dot{q}_r \delta p_r,$$

что после подробной записи вариации δH можно переписать в виде

$$\sum \frac{\partial H}{\partial q_r} \delta q_r + \sum \frac{\partial H}{\partial p_r} \delta p_r = -\sum \dot{p}_r \delta q_r + \sum \dot{q}_r \delta p_r.$$

Так как исходное равенство (a) есть тождество, то тождеством будет и последнее равенство. Поэтому мы можем в нем приравнять друг другу коэффициенты при одинаковых вариациях, что дает

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (5)$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка относительно переменных q_r, p_r и называются каноническими.

Уравнения в канонических переменных могут быть представлены и в других видах. Поэтому для отличия уравнений (5) от других возможных форм их часто называют *каноническими уравнениями в форме Гамильтона* или просто *уравнениями Гамильтона*. Основное преимущество уравнений Гамильтона состоит в том, что их правые части выражаются с помощью одной функции H.

Заметим, что канонические уравнения могут быть составлены и для неконсервативных систем. В этом случае, разбивая активные силы на консервативные и неконсервативные, можем уравнения Лагранжа взять в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

где Q_r — обобщенные силы, отвечающие только неконсер-

вативным силам. Так как из этих уравнений будет следовать, вместо (c),

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \dot{p}_r - Q_r,$$

то, повторяя те же рассуждения, придем к уравнениям

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + \overline{Q}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

где $\overline{Q}_r$ — обобщенные силы, выраженные в канонических переменных.

2. Функция Гамильтона. Записывая функцию Лагранжа в виде

$$L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V,$$

видим, что аналогично T

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

где $L_2 = T_2$ есть однородная квадратичная функция относительно обобщенных скоростей, $L_1 = T_1$ — такая же линейная функция этих скоростей, $L_0 = T_0 - V$ — функция, зависящая только от координат и времени. Применяя тогда теорему Эйлера об однородных функциях, находим:

$$-L + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r = -L_2 - L_1 - L_0 + 2L_2 + L_1 = L_2 - L_0.$$

Обозначая далее чертой вверху функции, выраженные в канонических переменных, находим по (4), что функция Гамильтона есть

$$H(q, p, t) = \overline{L}_2 - L_0,$$

что иначе можно еще записать в виде

$$H(q, p, t) = \overline{T}_2 - T_0 + V. \qquad (6)$$

Это выражение показывает, что в общем случае функция Гамильтона не имеет прямого физического смысла. Если же система материальных точек свободна или же подчинена склерономным связям, то, как мы знаем, $T = T_2$, $T_0 = 0$, и из (6) получаем

$$H = \overline{T} + V;$$

следовательно, в этом случае функция Гамильтона равна полной энергии системы, выраженной в канонических переменных.

3. Некоторые интегралы канонической системы. В соответствии с общей теорией систем обыкновен-

ных дифференциальных уравнений, интегралом системы канонических уравнений (5) называется всякое равенство

$$f(q, p, t) = c = \text{const}$$

или

$$\varphi(q, p, t, c) = 0,$$

выполняющееся при всех значениях q_r и p_r, удовлетворяющих уравнениям (5). Здесь через f и φ обозначены некоторые функции своих аргументов.

Задача интегрирования канонической системы (5) будет решена, если будут найдены $2s$ независимых между собой интегралов

$$f_j(q, p, t) = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2s)$$

или

$$\varphi_j(q, p, t, c_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2s).$$

Разрешая эти равенства относительно q_r и p_r, найдем канонические переменные как функции времени и $2s$ произвольных постоянных c_j, определяемых из начальных условий.

Так как импульсы p_r являются функциями от обобщенных скоростей $\dot{q}_r$, то интегралы канонической системы, содержащие импульсы, называются *первыми* или *промежуточными* интегралами уравнений движения системы.

Укажем некоторые частные случаи, в которых можно непосредственно получить интегралы системы (5).

В качестве первого случая рассмотрим случай склерономной системы, при котором, как мы знаем, кинетическая и потенциальная энергии не зависят явно от t. В таком случае согласно (7) функция Гамильтона тоже не будет явно зависеть от t, так что $H = H(q, p)$. Возьмем производную по времени

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r \right).$$

Заменяя здесь $\dot{q}_r$ и $\dot{p}_r$ из канонических уравнений (5), находим, что двучлен, стоящий под знаком суммы, равен нулю. Следовательно,

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

что дает интеграл канонической системы

$$H(q, p) = h, \tag{8}$$

где h — постоянная интегрирования. В силу выражения (7) этот интеграл имеет смысл интеграла энергии, записанного в канонических переменных.

Другим случаем является случай циклических координат, то есть тех координат, которые, как мы говорили ранее

(см. § 36, п. 5), явно не входят в функцию Лагранжа L, входя в нее лишь своими производными. Тогда, согласно формуле (4), эти координаты не будут явно входить и в функцию H. Если поэтому так выбрать нумерацию координат, что циклическими будут κ первых координат, то для них

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \kappa),$$

и соответствующие уравнения второй группы канонической системы (5) примут вид

$$\frac{dp_r}{dt} = 0.$$

Отсюда имеем κ первых интегралов

$$p_r = \alpha_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, \kappa), \tag{9}$$

где α_r — произвольные постоянные. Эти интегралы называются циклическими и говорят о том, что импульсы, отвечающие циклическим координатам, постоянны во все время движения.

Если все координаты циклические, то все импульсы окажутся постоянными; тогда для склерономной системы будем иметь

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_r} = \beta_r = \text{const}.$$

В таком случае первая группа уравнений системы (5) дает

$$\frac{dq_r}{dt} = \beta_r, \qquad q_r = \beta_r t + \gamma_r,$$

то есть все координаты оказываются линейными функциями времени; тем самым задача интегрирования канонической системы будет решена. Отсюда вытекает, что нужно стремиться к такому выбору независимых координат, чтобы все они оказались циклическими. Этого можно достичь, отыскивая такие преобразования переменных q, p в новые переменные, в которых бы система (5) переходила в новую каноническую систему, а новые координаты все оказались бы циклическими. Возможность решения этой задачи, а также целесообразность ее постановки, выясним позднее при рассмотрении канонических преобразований.

Пример. Требуется составить канонические уравнения для свободной материальной точки, движущейся под действием центральной силы, зависящей от расстояния до центра силы.

За независимые координаты примем полярные координаты в плоскости движения точки с началом в центре силы. Кинетическая энергия точки есть

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Поэтому для импульсов будем иметь

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Отсюда

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2},$$

что после подстановки этих выражений в T дает

$$\overline{T} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right).$$

Потенциальная энергия точки в поле центральной силы будет некоторая функция $V = V(r)$.

Так как точка свободна, то функция Гамильтона найдется по формуле (7):

$$H = \overline{T} + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r).$$

Канонические уравнения получатся в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2},$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\varphi^2}{mr^3} + V'(r), \qquad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

Эти уравнения имеют интегралы

$$H \equiv \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r) = h, \quad p_\varphi = c,$$

являющиеся хорошо известными интегралами энергии и площадей.

4. Некоторые сведения из теории уравнений в частных производных и уравнение Гамильтона — Якоби. Возьмем уравнение в частных производных первого порядка для функции $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad \text{(a)}$$

где $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$. Тогда функция $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющая уравнению (a) и зависящая от такого же числа постоянных α_i, сколько имеется независимых переменных, называется полным интегралом уравнения (a).

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad \text{(b)}$$

то есть если функция z не входит явно в уравнение, то добавление к какому-либо решению уравнения (b) произвольной постоянной тоже дает решение этого уравнения. Поэтому для определения полного интеграла достаточно найти решение, зависящее лишь от $n-1$ постоянных, полный же интеграл будет

$$z = \tilde{z}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) + \alpha_n, \qquad (c)$$

в котором одна из произвольных постоянных будет входить аддитивно.

Если не только искомая функция, но и некоторые независимые переменные не входят явно в функцию F, например, если уравнение имеет вид

$$F(x_{\kappa+1}, x_{\kappa+2}, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_\kappa, p_{\kappa+1}, \ldots, p_n) = 0, \qquad (d)$$

то его можно преобразовать к уравнению для функции, зависящей только от $n-\kappa$ переменных. Для этого полагаем

$$z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_\kappa x_\kappa + \zeta(x_{\kappa+1}, \ldots, x_n);$$

отсюда находим

$$p_1 = \alpha_1, \ldots, p_\kappa = \alpha_\kappa, \; p_{\kappa+1} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_{\kappa+1}}, \ldots, \; p_n = \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}.$$

Поэтому уравнение (d) перейдет в уравнение

$$F\left(x_{\kappa+1}, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa; \frac{\partial \zeta}{\partial x_{\kappa+1}}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}\right) = 0,$$

что и требовалось показать. Полный интеграл этого уравнения будет иметь общий вид:

$$\zeta = \tilde{\zeta}(x_{\kappa+1}, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1}, \ldots, \alpha_{n-1}) + \alpha_n;$$

поэтому для полного интеграла уравнения (d) получим выражение

$$z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_\kappa x_\kappa + \tilde{\xi}(x_{\kappa+1}, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots \alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1}, \ldots \alpha_{n-1}) + \alpha_n;$$

Известно, наконец, что уравнения характеристик для уравнения (b) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dp_1}{-X_1} = \ldots = \frac{dp_n}{-X_n},$$

где

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \; X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Перепишем теперь каноническую систему (5) в аналогичном виде

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_s}{\frac{\partial H}{\partial p_s}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_s}{-\frac{\partial H}{\partial q_s}} = \frac{dt}{1}. \qquad (10)$$

Отсюда вытекает, что каноническую систему уравнений можно рассматривать как систему уравнений характеристик для уравнения в частных производных первого порядка.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s; t; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0, \qquad (11)$$

где S — неизвестная функция координат и времени, причем в уравнениях (10) частные производные от S по координатам обозначены через p_r. Уравнение (11) называется *уравнением Гамильтона — Якоби.*

Якоби установил метод получения всех $2s$ независимых интегралов канонических уравнений, основанный на разыскании полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Для функции S независимыми переменными являются $s+1$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_s, t$. Поскольку сама функция S в уравнение (11) явно не входит, то из $s+1$ произвольных постоянных одна будет аддитивной, и полный интеграл будет иметь вид:

$$S = \tilde{S}(q_1, q_2, \ldots, q_s, t; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) + \alpha_{s+1}. \qquad (12)$$

Функция (12) называется *главной функцией Гамильтона.*

В общем случае задача интегрирования уравнения (11), как известно сводится к интегрированию дифференциальных уравнений характеристик (10), то есть тех же канонических уравнений. Поэтому метод Якоби имеет главным образом теоретическое значение. Однако в некоторых случаях он позволяет найти главную функцию Гамильтона независимо от уравнений (10) и тем самым найти интегралы канонической системы.

5. Теорема Якоби. В основе метода Якоби лежит следующая его теорема:

Если найден полный интеграл (12) уравнения Гамильтона — Якоби (11), то есть найдена главная функция Гамильтона S, тождественно удовлетворяющая уравнению (11), то равенства

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \beta_r, \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r \quad (r = 1, 2, \ldots, s), \qquad (13)$$

где β_r — произвольные постоянные, образуют полную систему независимых интегралов канонических уравнений (5).

Для доказательства теоремы покажем, что канонические уравнения являются следствием равенств (13).

Дифференцируя равенства первой группы (13) по времени t, имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial q_\rho} \frac{dq_\rho}{dt} = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad \text{(a)}$$

При подстановке полного интеграла в уравнение (11) получим тождество, поэтому после такой подстановки производная по любому входящему в уравнение аргументу будет равна нулю. Составляя такую производную по постоянной α_r и учитывая, что произвольные постоянные входят только в производные от S, получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_r} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \frac{\partial p_\rho}{\partial \alpha_r} = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, s),$$

где p_ρ определяются второй группой равенств (13); это позволяет переписать полученные уравнения в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_r} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\rho \partial \alpha_r} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad \text{(b)}$$

Оказалось, что производные $\frac{dq_\rho}{dt}$ и $\frac{\partial H}{\partial p_\rho}$ являются корнями одной и той же системы уравнений (a) и (b) соответственно. Для существования единственного решения каждой из этих систем необходимо, чтобы определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, был неравен нулю.

Определитель Δ будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\partial S}{\partial q_1}, & \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\partial S}{\partial q_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\partial S}{\partial q_s} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{\partial S}{\partial q_1}, & \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{\partial S}{\partial q_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{\partial S}{\partial q_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\frac{\partial S}{\partial q_1}, & \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\frac{\partial S}{\partial q_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\frac{\partial S}{\partial q_s} \end{vmatrix} = \frac{D\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)}.$$

Если бы было $\Delta = 0$, то между производными $\frac{\partial S}{\partial q_\rho}$ существовала бы зависимость, свободная от явно входящих произвольных постоянных α_r, вида

$$\Psi\left(\frac{\partial S}{\partial q_\rho}, q_\rho, t\right) = 0.$$

Но тогда функция S была бы полным интегралом также и этого уравнения; это уравнение, как не содержащее про-

изводной $\frac{\partial S}{\partial t}$, заведомо отлично от уравнения Гамильтона-Якоби и его полный интеграл во всяком случае по-иному зависит от t. Это значит, что мы пришли к невозможному результату. Следовательно, наше предположение неверно, определитель Δ отличен от нуля, а поэтому системы (a) и (b) имеют единственное решение; это дает

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

то есть дает первую группу канонических уравнений.

Для получения второй группы уравнений Гамильтона продифференцируем уравнение Гамильтона — Якоби (11) по каждой из координат q_r, опять считая, что функция S заменена в нем полным интегралом; получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_r} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \frac{\partial p_\rho}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Но по доказанному и из второй группы равенств (13)

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{dq_\rho}{dt}, \quad \frac{\partial p_\rho}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\rho \partial q_r}.$$

Следовательно, предыдущим равенствам можно дать вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_r} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\rho \partial q_r} \frac{dq_\rho}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Дифференцирование же второй группы уравнений (13) по t дает

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial t} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial q_\rho} \frac{dq_\rho}{dt} - \frac{dp_r}{dt} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Сравнением с предыдущими уравнениями находим

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

то есть получим вторую группу канонических уравнений. Тем самым теорема доказана.

Таким образом, метод Якоби дает простой способ получения всех интегралов канонической системы, если только можно найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

6. Случай склерономной системы. Как уже говорилось, в этом случае функция Гамильтона H не будет

явно зависеть от t, и уравнение Гамильтона — Якоби примет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0. \qquad \text{(a)}$$

В это уравнение t явно не входит, поэтому его можно свести к уравнению для функции, зависящей только от s переменных $q_1, q_2, \ldots, q_s$. С этой целью полагаем

$$S = -ht + W, \qquad \text{(b)}$$

где h — произвольная постоянная, а $W = W(q_1, \ldots, q_s)$ — новая функция. Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = \frac{\partial W}{\partial q_r},$$

и уравнение (a) принимает вид:

$$H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = h, \qquad (14)$$

не содержащий переменной t. Как видим, для получения уравнения (14) нужно взять интеграл энергии в форме (8) и заменить в нем импульсы производными от функции W.

Полный интеграл уравнения (14) будет иметь общий вид

$$W = \tilde{W}(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, h) + \alpha_s. \qquad (15)$$

Этот интеграл называется *характеристической функцией*. Тогда согласно (b) главная функция Гамильтона определится выражением

$$S = -ht + \tilde{W}(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, h) + \alpha_s.$$

Так как

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_r} \; (r = 1, 2, \ldots, s-1), \quad \frac{\partial S}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h},$$

то, вводя обозначение произвольной постоянной $\beta_s = -t_0$, можем первую группу интегралов (13) канонических уравнений представить в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_r} = \beta_r \; (r = 1, 2, \ldots, s-1), \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0. \qquad (16)$$

Промежуточные же интегралы, то есть интегралы второй группы уравнений (13), получатся простой заменой S на W, то есть

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = p_r \; (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (17)$$

Первые $s-1$ интегралов (16) не содержат времени t: они поэтому называются геометрическими. В s-мерном пространстве координат $q_1, \ldots, q_s$ они дают траекторию точки, изображающей движение системы. Последний же интеграл (16) называется кинематическим, и он служит для установления связи координат со временем, то есть позволяет установить закон движения системы. В этом отделении геометрических интегралов от кинематического, которое нельзя получить при использовании, например, уравнений Лагранжа, состоит существенное преимущество канонических уравнений.

Пример. Найти движение тяжелой материальной точки массы m, пользуясь методом Якоби.

Решая задачу в декартовых координатах, имеем:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

откуда, как мы видели ранее,

$$p_x = m\dot{x},\ p_y = m\dot{y},\ p_z = m\dot{z}.$$

Подставляя получающиеся отсюда значения $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в T, находим

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Ось z направим вертикально вверх; тогда потенциальная энергия будет

$$V = mgz,$$

и функция Гамильтона получается в виде

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Это позволяет записать уравнение (14) для характеристической функции

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + 2m^2gz = 2mh.$$

Так как координаты x, y не входят явно в это уравнение, то полагаем

$$W = \alpha_1 x + \alpha_2 y + f(z); \qquad \text{(a)}$$

в результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 + 2m^2gz = 2mh,$$

откуда

$$\frac{df}{dz} = -\sqrt{F(z)}, \qquad \text{(b)}$$

где

$$F(z) = 2mh - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2m^2gz. \qquad \text{(c)}$$

Интегрируя уравнение (b), находим:

$$f(z) = \frac{1}{3m^2g}[F(z)]^{3/2} + \alpha_3.$$

Постановка в (a) дает

$$W = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \frac{1}{3m^2g}[F(z)]^{3/2} + \alpha_3.$$

Отсюда интегралы (16) канонических уравнений получаем в виде

$$x - \frac{\alpha_1}{m^2 g}\sqrt{F(z)} = \beta_1, \quad y - \frac{\alpha_2}{m^2 g}\sqrt{F(z)} = \beta_2,$$

$$\frac{1}{mg}\sqrt{F(z)} = t - t_0,$$

где $F(z)$ определяется по (c); знак минус перед корнем в (b) выбран потому, чтобы при $t > t_0$ левая часть последнего интеграла была бы больше нуля. Первые два интеграла чисто геометрические: они являются уравнениями двух цилиндрических поверхностей, пересечение которых дает траекторию точки; третий интеграл — кинематический, дающий закон движения точки. Полученное решение, как содержащее шесть произвольных постоянных α_1, α_2, β_1, β_2, h, t_0, является наиболее общим, давая полный класс всех возможных траекторий точки.

Промежуточные интегралы второй группы (16) дают выражения для импульсов

$$p_x = \alpha_1, \; p_y = \alpha_2, \; p_z = -\sqrt{F(z)}.$$

Первые два импульса оказались постоянными в соответствии с тем, что координаты x и y являются циклическими (не входят в H).

7. Скобки Пуассона. Пуассон дал метод, позволяющий по известным двум интегралам канонической системы найти третий; повторяя этот процесс, можно разыскать еще ряд интегралов. Этот метод основан на применении так называемых *скобок Пуассона.*

Допустим, что имеются две функции φ и ψ, зависящие от канонических переменных q, p и, возможно, времени t. Тогда скобкой Пуассона называется выражение вида

$$(\varphi,\psi) = \sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\frac{\partial\psi}{\partial p_r} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_r}\frac{\partial\psi}{\partial q_r}\right). \tag{18}$$

Установим основные свойства скобок Пуассона.

Непосредственно из (18) находим:

$$(\varphi,\ \psi) = -(\psi,\ \varphi),$$

$$(\varphi,\ -\psi) = -(\varphi,\ \psi) = (\psi,\ \varphi),$$

$$(\varphi,\ c) = 0.$$

Если функции φ и ψ зависят явно от t, то будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\ \psi) = \sum\left\{\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_r} - \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q_r}\right\} +$$

$$+\sum\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_r}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right\} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right).$$

Следовательно, частная производная по времени (как, впрочем, и по всякому другому аргументу) составляется по правилу дифференцирования произведения.

Пусть f, φ, ψ — произвольные функции канонических переменных. Тогда для двойных скобок Пуассона, состав-

ленных из этих функций, существует тождество Пуассона

$$(f, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) \equiv 0. \qquad (19)$$

Это тождество можно проверить непосредственным вычислением. Однако проще поступить иначе, если заметить, что каждый член развернутой левой части (19) имеет вид произведения производной второго порядка от одной из функций на две производные первого порядка; поэтому для доказательства тождества (19) достаточно показать, что оно не содержит производных второго порядка.

Покажем, например, что (19) не содержит членов с вторыми производными от f. Для этого возьмем два выражения:

$$A(f) = \sum_{r=1}^{s} A_r \frac{\partial f}{\partial q_r} + \sum_{r=1}^{s} A_{s+r} \frac{\partial f}{\partial p_r}; \qquad (a)$$

$$B(f) = \sum_{r=1}^{s} B_r \frac{\partial f}{\partial q_r} + \sum_{r=1}^{s} B_{s+r} \frac{\partial f}{\partial p_r}, \qquad (b)$$

где все A_r и B_r являются функциями канонических переменных и времени. Если в (a) заменить f через $B(f)$, то в полученном выражении $A[B(f)]$ коэффициент при $\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}$ будет равен A_1B_1, а при $\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}$ он будет $A_1B_2 + A_2B_1$. Составляя же выражение $B[A(f)]$ видим, что в нем коэффициенты при тех же производных будут иметь то же значение. То же самое относится ко всем производным второго порядка, откуда следует, что разность

$$A[B(f)] - B[A(f)] \qquad (c)$$

не содержит производных второго порядка от f.

Рассмотрим теперь часть тождества (19)

$$(\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) = (\varphi, (\psi, f)) - (\psi, (\varphi, f)), \qquad (d)$$

которая может содержать вторые производные от f. Очевидно, что всякие скобки Пуассона можно рассматривать как операции типа (a) и (b), произведенные над одной из функций. Поэтому можно положить

$$(\psi, f) = B(f), \ (\varphi, f) = A(f),$$

и тогда выражение (d) принимает вид (c), не содержащий, по доказанному, вторых производных от f.

Те же рассуждения относятся и к функциям φ и ψ, и поэтому тождество (19) действительно справедливо.

8. Теорема Пуассона. Если имеется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

то, как известно из теории дифференциальных уравнений, необходимым и достаточным условием того, что равенство $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ является интегралом этой системы, будет тождество

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Для канонической системы

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_s}{\frac{\partial H}{\partial p_s}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_s}{-\frac{\partial H}{\partial q_s}} = \frac{dt}{1}$$

это условие принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{r=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial f}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) \equiv 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) \equiv 0. \qquad \text{(a)}$$

Метод Пуассона основывается на следующей его теореме:

Если равенства $\varphi(q, p, t) = a$, $\psi(q, p, t) = b$ *являются интегралами канонической системы (5), то равенство* $(\varphi, \psi) = c$ *тоже будет интегралом этой системы.*

В самом деле, для функций φ и ψ должно выполняться тождество (a):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) \equiv 0. \qquad \text{(b)}$$

Возьмем тождество Пуассона (19) для функций H, φ, ψ

$$(H, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, H)) + (\psi, (H, \varphi)) \equiv 0$$

и подставим в него получающиеся из (b) значения

$$(H, \varphi) = -(\varphi, H) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (\psi, H) = -\frac{\partial \psi}{\partial t};$$

получим:

$$(H, (\varphi, \psi)) + \left(\varphi, -\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \equiv 0.$$

Меняя знак, находим

$$((\varphi, \psi), H) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) \equiv 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) + ((\varphi, \psi), H) \equiv 0.$$

Это тождество, в соответствии с (а), говорит о том, что $(\varphi, \psi) = c$ есть интеграл канонической системы, что и требовалось доказать.

Приравнивая скобку Пуассона $(\varphi, (\varphi, \psi))$ и $(\psi, (\varphi, \psi))$ постоянным, получим новые интегралы, составляя скобки Пуассона от вновь полученных интегралов и прежних, получим еще новые интегралы и т. д. Однако этот простой способ не всегда позволяет получить полную систему интегралов канонических уравнений, ибо часть интегралов может оказаться зависящей от ранее полученных и не будет давать независимых интегралов системы (5). Кроме того, на некотором этапе скобка Пуассона от двух интегралов может тождественно обратиться в нуль и, следовательно, не будет давать нового интеграла.

Рассмотрим еще частный случай склерономной системы. В этом случае всегда имеется интеграл $H(q, p) = h$. Поэтому, если будет известен еще один интеграл $\varphi(q, p) = a$, то

$$(\varphi, H) = c \qquad \text{(c)}$$

будет тоже интегралом канонической системы. Но из тождества

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) \equiv 0$$

следует, что

$$(\varphi, H) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

поэтому интеграл (с) может быть записан в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_1.$$

Повторяя то же рассуждение для этого интеграла, найдем что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_2$ будет тоже интегралом системы (5). Продолжая этот процесс, найдем таким образом, что если $\varphi = a$ есть интеграл канонической системы, то и все последовательные частные производные по времени, приравненные произвольным постоянным, тоже явятся интегралами канонических уравнений. Однако эта цепочка новых интегралов обор-

ветсяна той производной, которая окажется независящей явно от t, ибо следующая производная окажется тождественно равной нулю и не будет поэтому давать нового интеграла. Кроме того, начиная с некоторой производной, все интегралы могут оказаться зависящими от предыдущих.

Пример. Рассмотрим движение системы двух материальных точек, взаимно притягивающихся силами, прямо пропорциональными расстоянию между точками.

Силы взаимодействия являются внутренними силами данной системы. Поэтому, пользуясь результатами, рассмотренными в § 34, п. 3, найдем, что элементарная работа этих сил равна $-Fdr$, где $F=\mu r$ — модуль каждой силы, причем здесь r — расстояние между точками, μ — коэффициент пропорциональности. Поэтому потенциал сил взаимного притяжения будет

$$U=-\int Fdr=-\mu\int rdr=-\frac{\mu r^2}{2},$$

а потенциальная энергия —

$$V=-U=\frac{\mu r^2}{2}.$$

Обозначим через m_1, m_2 массы точек, через q_1, q_2, q_3 и q_4, q_5, q_6 — их декартовы координаты. Тогда, как мы видели,

$$\dot q_\kappa=\frac{p_\kappa}{m_1}\ (\kappa=1,\ 2,\ 3),\quad \dot q_\kappa=\frac{p_\kappa}{m_2}\ (\kappa=4,\ 5,\ 6),$$

Выражая еще r^2 через сумму квадратов разностей координат, получим функцию Гамильтона в виде

$$H=T+V=\frac{1}{2m_1}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2m_2}(p_4^2+p_5^2+p_6^2)+$$
$$+\frac{\mu}{2}[(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2].$$

Отсюда канонические уравнения движения будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dq_1}{dt}=\frac{p_1}{m_1},\ \frac{dq_2}{dt}=\frac{p_2}{m_1},\ \frac{dq_3}{dt}=\frac{p_3}{m_1};\\
&\frac{dq_4}{dt}=\frac{p_4}{m_2},\ \frac{dq_5}{dt}=\frac{p_5}{m_2},\ \frac{dq_6}{dt}=\frac{p_6}{m_2};\\
&\frac{dp_1}{dt}=-\mu(q_1-q_4),\ \frac{dp_2}{dt}=-\mu(q_2-q_5),\ \frac{dp_3}{dt}=-\mu(q_3-q_6),\\
&\frac{dp_4}{dt}=\mu(q_1-q_4),\ \frac{dp_5}{dt}=\mu(q_2-q_5),\ \frac{dp_6}{dt}=\mu(q_3-q_6).
\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

Последние шесть уравнений имеют очевидные интегралы

$$p_1+p_4=c_1,\ p_2+p_5=c_2,\ p_3+p_6=c_3,$$

говорящие о сохранении движения центра масс системы.

Относительное движение, например, первой точки по отношению ко второй, происходит под действием центральной силы; поэтому для этого движения справедливы интегралы площадей вида:

$$(q_2-q_5)(\dot q_3-\dot q_6)-(q_3-q_6)(\dot q_2-\dot q_5)=c_4,$$

что при переходе к каноническим переменным дает три интеграла:

$$\left(\frac{p_3}{m_1}-\frac{p_6}{m_2}\right)(q_2-q_5)-\left(\frac{p_2}{m_1}-\frac{p_5}{m_2}\right)(q_3-q_6)=c_4;$$

$$\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}\right)(q_3-q_6)-\left(\frac{p_3}{m_1}-\frac{p_6}{m_2}\right)(q_1-q_4)=c_5;$$

$$\left(\frac{p_2}{m_1}-\frac{p_5}{m_2}\right)(q_1-q_4)-\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}\right)(q_2-q_5)=c_6.$$

Из первого и четвертого уравнений (a) имеем:

$$\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}=\frac{d}{dt}(q_1-q_4), \tag{b}$$

а из седьмого и десятого —

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}\right)=-\lambda^2(q_1-q_4), \tag{c}$$

где

$$\lambda^2=\mu\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right).$$

Перемножая (b) и (c) и интегрируя, имеем

$$\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}\right)^2+\lambda^2(q_1-q_4)^2=c_7.$$

Умножая (b) на $\lambda\cos\lambda t$, (c) — на $\sin\lambda t$ и складывая, можем результат записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}\right)\sin\lambda t\right]=\lambda\frac{d}{dt}[(q_1-q_4)\cos\lambda t],$$

откуда получаем интеграл

$$\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_4}{m_2}\right)\sin\lambda t-\lambda(q_1-q_4)\cos\lambda t=c_8.$$

Условимся обозначать интегралы отвечающими им постоянными. Если уравнения (a), находящиеся в первой строке, умножить на m_1, во второй — на m_2 и сложить первое уравнение с четвертым, второе с пятым, третье с шестым, то получим уравнения вида:

$$\frac{d}{dt}(m_1q_1+m_2q_2)=p_1+p_4,$$

в которых правые части, в силу интегралов c_1, c_2, c_3 постоянны. Отсюда получаем еще три интеграла:

$$m_1q_1+m_2q_4-(p_1+p_4)t=c_9;$$

$$m_1q_2+m_2q_5-(p_2+p_5)t=c_{10};$$

$$m_1q_3+m_2q_6-(p_3+p_6)t=c_{11}.$$

Эти интегралы представляют собой иную запись закона прямолинейного движения центра масс.

Составим, наконец, пользуясь методом Пуассона, интеграл $(c_6, c_7,)=c_{12}$; так как

$$(c_6, c_7)=\sum_{r=1}^{6}\left(\frac{\partial c_6}{\partial q_r}\frac{\partial c_7}{\partial p_r}-\frac{\partial c_6}{\partial p_r}\frac{\partial c_7}{\partial q_r}\right)=$$

$$= \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2}\right) \cdot \frac{2}{m_1}\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2}\right) + \frac{1}{m_1}(q_2 - q_5) \cdot 2\lambda^2 (q_1 - q_4) +$$

$$+ \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2}\right) \cdot \frac{2}{m_2}\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2}\right) + \frac{1}{m_2}(q_2 - q_5) \cdot 2\lambda^2 (q_1 - q_4),$$

то этот интеграл примет вид:

$$\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2}\right)\left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2}\right) + \lambda^2 (q_1 - q_4)(q_2 - q_5) = c_{12}.$$

Получили полную систему двенадцати независимых интегралов канонических уравнений (а). Всякие другие комбинации, составленные по методу Пуассона, будут тождественно равняться нулю или давать интегралы, зависящие от полученных. Так, очевидно, что $(c_1, c_2) = (c_2, c_3) = (c_3, c_1) \equiv 0$, $(c_1, c_4) = (c_2, c_5) = (c_3, c_6) \equiv 0$. Рассмотрим еще комбинацию (c_{12}, c_6); имеем:

$$(c_{12}, c_6) = -\lambda^2 (q_2 - q_5)^2 \frac{1}{m_1} - \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2}\right)^2 \frac{1}{m_1} +$$

$$+ \lambda^2 (q_1 - q_4)^2 \frac{1}{m_1} + \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2}\right)^2 \frac{1}{m_1} - \lambda^2 (q_2 - q_5)^2 \frac{1}{m_2} - \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_4}\right)^2 \frac{1}{m_2} +$$

$$+ \lambda^2 (q_1 - q_4)^2 \frac{1}{m_2} + \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2}\right)^2 \frac{1}{m_2}.$$

Умножая это выражение на

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

и учитывая c_7, получаем интеграл

$$\left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2}\right)^2 + \lambda^2 (q_2 - q_5)^2 = c'.$$

Однако вычислениями нетрудно убедиться, что

$$c_7 c' - c_{12}^2 = \lambda^2 c_6^2$$

и, следовательно, интеграл c' будет зависеть от интегралов c_6, c_7, и c_{12}.

Мы видели, что если система склерономна и в интеграл входит явно время t, то частная производная по времени тоже будет давать интеграл. Зная, например, интегралы c_9, c_{10}, c_{11}, мы могли бы этим путем получить интегралы c_1, c_2, c_3. Точно так же, дифференцируя по t c_8, получим интеграл

$$\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2}\right) \cos \lambda t + \lambda (q_1 - q_4) \sin \lambda t = c''.$$

Но этот интеграл не будет независимым, ибо, как легко проверить,

$$c_8^2 + c''^2 = c_7.$$

§ 47. Вариационные принципы механики

1. О принципах механики. Как и в других точных науках, содержание теоретической механики строится на базе некоторых основных положений, принимаемых за аксиомы. Положения, которые могут быть приняты за такие аксиомы, принято называть *принципами* или *основными законами механики*. Принимая ту или иную систему

аксиом, мы получим остальные возможные принципы как следствие принятых.

Желая иметь как можно меньше бездоказательных положений, во всякой точной науке стремятся к тому, чтобы число исходных принципов было как можно меньшим. Однако в учебной литературе следует стремиться и к тому, чтобы система принципов была наиболее убедительной и дающей по возможности более простое изложение содержания механики.

Различные принципы обладают той или иной степенью общности, поэтому построенная на них механика будет справедлива только в тех пределах, в которых имеют силу принятые принципы.

Как указывалось ранее, обычно за исходные принципы берутся законы Ньютона. Однако Лагранж построил свою «Аналитическую механику» на основе одного только общего уравнения механики, получившего название принципа Даламбера — Лагранжа. Герц дал изложение механики на основе принципа наименьшего принуждения Гаусса, с которым мы познакомимся далее.

Принципы механики, устанавливающие какое-либо общее свойство движения для каждого момента времени, называются дифференциальными, а те принципы, которые справедливы только для конечного промежутка времени, называются интегральными. Так, законы Ньютона и принцип Даламбера — Лагранжа являются дифференциальными принципами, а закон сохранения энергии может служить примером интегрального принципа.

Кроме того, существует еще деление принципов на вариационные и невариационные.

Вариационными называются те принципы, которые устанавливают какое-либо свойство истинного движения, отличающее его от всех других воображаемых движений, допускаемых связями и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, характерным для данного принципа. Невариационными же будут принципы, в которых никакого сравнения с допустимыми движениями не делается. Примерами невариационных принципов являются законы Ньютона и закон сохранения энергии, а вариационных — принцип Даламбера—Лагранжа, ибо устанавливаемое этим принципом равенство нулю работы активных сил и сил инерции справедливо лишь на виртуальном перемещении из действительного положения системы, а не из всякого, допускаемого связями.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых других важнейших вариационных принципов, сначала интегральных, а затем дифференциальных.

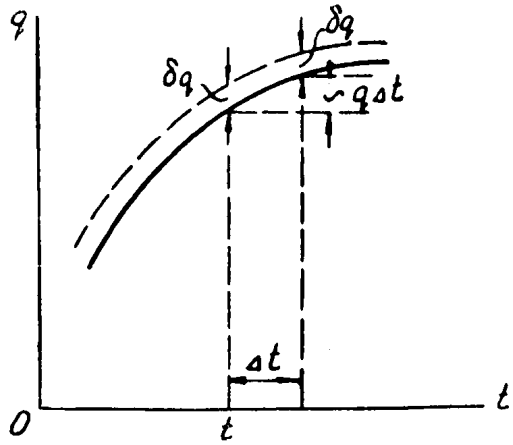
2. Понятие о полной вариации и вывод основной формулы. При рассмотрении понятия о виртуальных перемещениях (§ 30, п. 3) мы назвали вариацией δq какой-

либо функции времени $q(t)$ такое ее элементарное изменение, которое возникает вследствие весьма малого изменения самого вида функциональной зависимости. Так как это изменение рассматривается при неизменном времени ($\delta t = 0$), то его называют простой или *изохронной* вариацией.

Наряду с такой вариацией вводится понятие о *полной* вариации функции, под которым понимается изменение функции, возникающее как вследствие ее изохронного варьирования, так и вследствие произвольного малого воображаемого изменения времени на некоторую величину Δt. При этом изменении аргумента сама функция получит изменение $\dot{q}\Delta t$. Тогда полная вариация функции Δq найдется как сумма указанных двух изменений в виде

$$\Delta q = \delta q + \dot{q}\Delta t. \qquad \text{(a)}$$

Этот результат наглядно показан на фиг. 184.



Фиг. 184

Если q^* есть значение функции, полученное при изохронном варьировании, то

$$\delta q = q^* - q.$$

Дифференцируя это тождество по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}\delta q = \dot{q}^* - \dot{q} = \delta\dot{q}, \qquad \text{(b)}$$

что говорит о взаимной переместимости операций дифференцирования и изохронного варьирования.

Применяя формулу (a) к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$ какой-либо точки, имеем:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \delta \boldsymbol{r} + \dot{\boldsymbol{r}} \Delta t,$$

откуда, используя (b), находим

$$\frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{r} = \delta \dot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\boldsymbol{r}} \Delta t + \dot{\boldsymbol{r}} \frac{d}{dt} \Delta t.$$

Так как по (a)

$$\Delta \dot{\boldsymbol{r}} = \delta \dot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\boldsymbol{r}} \Delta t,$$

то предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{r} = \Delta \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}} \frac{d}{dt} \Delta t. \tag{c}$$

Этот результат говорит в частности о том, что операции дифференцирования и полного варьирования свойством переместимости не обладают.

Далее, учитывая (c), получаем:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \Delta \boldsymbol{r}) = \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{r} = \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + \Delta \frac{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}{2} + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \frac{d}{dt} \Delta t$$

или

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + \Delta \frac{v^2}{2} + v^2 \frac{d}{dt} \Delta t, \tag{d}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость точки, $\boldsymbol{w}$ — ускорение.

Применим теперь равенство (d) к точке системы с номером i, умножим его на массу точки m_i и просуммируем по всем точкам системы; найдем

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \sum m_i \boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i + \Delta \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum m_i v_i^2 \frac{d}{dt} \Delta t.$$

Подставляя сюда значение

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i,$$

где, как обычно $\boldsymbol{F}_i$ — равнодействующая активных сил, $\boldsymbol{R}_i$ — равнодействующая реакций связей, и умножая еще все равенство на dt, можем результат записать в виде

$$d \sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \left(\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i + \Delta T \right) dt + 2T d (\Delta t).$$

Здесь T — кинетическая энергия системы. Вводя еще обозначение для работ активных сил и реакций связей

$$\Delta A = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i, \quad \Delta A_R = \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i, \tag{1}$$

получаем

$$d\sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = (\Delta T + \Delta A + \Delta A_R)\, dt + 2T d(\Delta t). \qquad \text{(e)}$$

Как и в случае изохронного варьирования мы будем понимать под $\Delta \boldsymbol{r}_i$ такие воображаемые элементарные перемещения точек системы из их положения в какой-либо момент времени, которые совместимы с наложенными на систему связями. Поэтому, если $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(t)$ есть закон движения какой-либо точки по ее действительной траектории, то зависимость $\boldsymbol{r}_i^* = \boldsymbol{r}_i + \Delta \boldsymbol{r}_i$ дает закон движения точки по некоторым близким допустимым связями траекториям. Все такие движения мы будем называть *кинематически допустимыми*; тогда дифференциальное соотношение (e) сопоставляет в каждый момент времени истинное движение системы со всяким другим кинематически допустимым.

Пусть теперь в момент t_0 система занимает некоторое положение A, а в какой-либо другой момент $t > t_0$ — положение B, причем оба положения фиксированы. Интегрируя равенство (e) от t_0 до t, мы получим в левой части

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \Big|_A^B;$$

но в положениях A и B радиус-вектор каждой точки имеет определенное значение $\boldsymbol{r}_i$, поскольку эти положения заданы. Следовательно, в этих положениях $\Delta \boldsymbol{r}_i = 0$ и полученная сумма исчезает. Поэтому интегрирование приводит к равенству

$$\int_{t_0}^{t} (\Delta T + \Delta A + \Delta A_R)\, dt + \int_{t_0}^{t} 2T d(\Delta t) = 0, \qquad (2)$$

которое и будет основной формулой, необходимой для дальнейшего. Формула (2) имеет тот смысл, что она выражает свойство истинного движения, отличающее его от всякого кинематически допустимого и относящееся к конечному промежутку времени $t - t_0$.

3. Принцип Гамильтона — Остроградского. Перейдем в формуле (2) к изохронному варьированию, полагая $\Delta t = 0$, $\Delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_i$. Кроме того, будем считать связи идеальными; тогда работа реакций

$$\Delta A_R = \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

окажется равной нулю. В итоге придем к равенству

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta A)\, dt = 0, \tag{3}$$

дающему наиболее общее выражение принципа Гамильтона-Остроградского.

Так как при переходе ко всякому кинематически допустимому движению время не варьируется, то эти движения следует рассматривать как происходящие за тот же промежуток времени, что и истинное движение. Это условие является характерным для данного принципа, и из него следует, что верхний предел в (3) имеет одно и то же значение для всех сравниваемых движений, и интеграл в этой формуле имеет постоянные пределы интегрирования.

Будем далее рассматривать тот случай, когда приложенные к системе силы имеют потенциал. Тогда

$$\delta A = \delta U = -\delta V.$$

Подставляя в (3) и замечая, что $\delta T - \delta V = \delta(T - V)$, можем символ δ вынести за знак интеграла, ибо вариации от пределов интегрирования равны нулю. Таким образом получим

$$\delta \int_{t_0}^{t} (T - V)\, dt = 0$$

или

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0,$$

где L — функция Лагранжа. Интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} (T - V)\, dt \tag{4}$$

называется *действием по Гамильтону*. При этом обозначении уравнение принципа запишется кратко

$$\delta S = 0. \tag{5}$$

Это уравнение говорит о том, что в истинном движении, в отличие от других кинематически допустимых, S принимает стационарное значение. Обычно это значение оказывается минимумом, хотя доказательства о характере получающегося экстремума до сих пор не существует.

Чтобы правильно сформулировать принцип, заметим еще, что приведенное в предыдущем пункте рассуждение о кинематически допустимых движениях предполагает, что связи имеют чисто геометрический характер, то есть являются

связями голономными. Аналогичное рассуждение для неголономных связей провести затруднительно и можно показать, что принцип Гамильтона — Остроградского справедлив не для всяких неголономных связей *).

В итоге можно дать следующую формулировку принципа.

При перемещении консервативной системы, подчиненной идеальным голономным связям, из одного заданного положения в другое заданное, истинное движение отличается от всех других кинематически допустимых движений, происходящих за тот же самый промежуток времени, тем, что для этого движения действие по Гамильтону имеет стационарное значение.

Мы обозначили действие по Гамильтону через S, то есть так же, как и главную функцию Гамильтона в методе Якоби; это не случайно: как легко показать, эти функции совпадают друг с другом.

В самом деле, считая в (4) верхний предел переменным и дифференцируя S по времени, находим для производной от действия по Гамильтону

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{a}$$

Производная же от главной функции Гамильтона есть

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_r} \dot{q}_r. \tag{b}$$

Так как она удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0,$$

а

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r,$$

то

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t).$$

Подставляя это значение в (b) и учитывая, что по определению импульсов

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r},$$

*) Соответствующий пример дан в известном руководстве Г. К. Суслова «Теоретическая механика».

находим

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r.$$

Так как

$$H = -L + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r$$

то подстановка дает

$$\frac{dS}{dt} = L,$$

что совпадает с выражением (а). Отсюда следует, что действие по Гамильтону с точностью до несущественной аддитивной постоянной равно главной функции Гамильтона.

Принцип Гамильтона — Остроградского имеет важное значение не только для теоретической механики, но и для всяких нестационарных задач гидромеханики, теории упругости и математической физики вообще.

Некоторые ученые считают, что принцип Гамильтона-Остроградского справедлив и для неголономных систем, хотя строгого доказательства этому факту они не дают. В связи с этим уместно обратить внимание на работу бывшего сотрудника кафедры теоретической механики Томского университета Б. Г. Кузнецова «Принцип Гамильтона-Остроградского и обобщенные виртуальные перемещения» (Труды Томского университета, т. 155, 1961 г.), в которой автор рассматривает этот вопрос, исходя из введенного им обобщенного понятия о виртуальных перемещениях» (см. его работу «Обобщенные виртуальные перемещения», Прикл. Мат. и Мех., т. 23, в. 4, 1959 г.). В итоге Б. Г. Кузнецов приходит к тому выводу, что если в вариационной задаче об экстремуме действия по Гамильтону в качестве движений сравнения рассматривать не только кинематически допустимые, но также и всякие другие, близкие к истинному, то принцип Гамильтона-Остроградского окажется справедливым и для неголономных связей. Можно показать, по мнению Б. Г. Кузнецова, что при предлагаемом им расширении движений сравнения и соответствующем более общем виде условий, налагаемых на виртуальные перемещения, принцип Гамильтона-Остроградского окажется справедливым и в выше упомянутом примере Г. К. Суслова.

4. Вывод уравнений движения из принципа Гамильтона — Остроградского. Так как функция L зависит от s функций $q_r(t)$, их первых производных и времени t, а пределы интеграла фиксированы, то задача об определении стационарного значения действия по Гамильтону (4) есть простейшая задача вариационного исчисления о нахождении таких функций $q_r = q_r(t)$, которые бы доставляли экстремум интегралу (4).

Как известно из вариационного исчисления, если требуется решить задачу об экстремуме интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n'; x)\, dx,$$

нужно составить дифференциальные уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

интегралы которых дают семейство так называемых экстремалей, то есть кривых $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, y_2, \ldots y_n$. Экстремаль, проходящая через точки, отвечающие пределам интеграла I, и будет давать экстремум этому интегралу.

Применяя этот результат к интегралу (4)

$$S = \int_{t_0}^{t} L dt,$$

мы должны x заменить через t, y_i — через q_r, n — через s. Тогда дифференциальные уравнения экстремалей примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

то есть как раз получаем уравнения движения Лагранжа второго рода для случая консервативных сил, при которых и справедливо уравнение принципа (5). Интегрируя эти уравнения и находя произвольные постоянные по заданным значениям координат в начальный и конечный моменты времени, получим закон движения системы.

Это означает, что, беря принцип Гамильтона — Остроградского в качестве исходного, можем построить содержание механики, справедливое в пределах применимости принципа.

5. Принцип наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа. Этот принцип, установленный Мопертюи еще в средине XVIII века для одной материальной точки, впервые был доказан Лагранжем, вследствие чего он и называется именами этих ученых.

По сравнению с принципом Гамильтона—Остроградского принцип наименьшего действия является более узким, справедливым для склерономных связей и только для того случая, когда активные силы имеют потенциал. Принцип получается из той же основной формулы (2), в которой только вместо условия об изохронном варьировании вводится условие о том, что все кинематически допустимые движения происходят с одной и той же полной энергией.

Таким образом, беря справедливый для данного случая интеграл энергии

$$T = U + h, \qquad (6)$$

мы должны считать h имеющим одно и то же значение для всех сравниваемых движений. Следовательно, $\Delta h = 0$ и варьирование (6) дает $\Delta U = \Delta T$.

Так как для склерономной системы и консервативных сил $\Delta A = \Delta U$, то

$$\Delta A = \Delta T. \qquad \text{(a}$$

Беря второе выражение (1) для ΔA_R и расписывая подробно $\Delta \boldsymbol{r}_i$, имеем

$$\Delta A_R = \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{R}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \Delta t.$$

Вследствие идеальности связей

$$\sum \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

а так как при склерономных связях действительные элементарные перемещения системы совпадают с одной из совокупностей виртуальных, то

$$\sum \boldsymbol{R}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \Delta t = \frac{\Delta t}{dt} \sum \boldsymbol{R}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta A_R = 0;$$

учитывая еще (a), можем формулу (2) переписать для нашего случая в виде

$$\int_{t_0}^{t} \Delta (2T)\, dt + \int_{t_0}^{t} 2T\, d(\Delta t) = 0.$$

Используя формулу полной вариации, получаем отсюда

$$\int_{t_0}^{t} \delta (2T)\, dt + \int_{t_0}^{t} \frac{d(2T)}{dt} \Delta t dt + \int_{t_0}^{t} 2T \frac{d(\Delta t)}{dt}\, dt = 0.$$

Вынося в первом члене символ δ за знак интеграла и объединяя остальные интегралы, имеем

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2T dt + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} (2T \Delta t)\, dt = 0$$

или

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2T dt + 2T \Delta t \Big|_{t_0}^{t} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Так как всем кинематически допустимым движениям отвечает один и тот же начальный момент t_0, то при нижнем пределе имеем $\Delta t_{t=t_0} = 0$. Иначе обстоит дело со зна-

чением Δt при верхнем пределе. Потенциал U есть функция положения системы, поэтому во всех кинематически допустимых движениях U будет принимать различные последовательности значений; а в силу того, что $h = \text{const}$ для всех движений, кинетическая энергия согласно (6) будет в каждый момент времени иметь разное значение во всех сравниваемых движениях. Поэтому эти движения будут происходить с различными скоростями и, следовательно, промежуток времени $t - t_0$, необходимый системе для перехода из начального положения в конечное, окажется, неодинаковым для сравниваемых движений. Отсюда следует, что в равенстве (b) при верхнем пределе $\Delta t \neq 0$, и его можно записать в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2T\,dt + 2T\Delta t = 0,$$

где Δt есть значение вариации времени при верхнем пределе.

Замечая, что

$$2T = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

можем предыдущему равенству придать окончательный вид:

$$\Delta \int_{t_0}^{t} 2T\,dt = 0.$$

Этот результат и составляет математическое содержание принципа наименьшего действия. Интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt \tag{7}$$

называется *действием по Лагранжу*, и уравнение принципа есть уравнение

$$\Delta W = 0. \tag{8}$$

Существует строгое доказательство того, что в данном случае будет иметь место не любое стационарное значение W, а именно минимум. Поэтому принципу наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа можно дать следующую формулировку:

При перемещении консервативной системы, подчиненной идеальным голономным и склерономным связям, из одного заданного положения в другое заданное, истинное движение отличается от всех других кинематически допустимым движений, совершающихся с той же полной энергией, тем, что для него действие по Лагранжу имеет минимум.

Уравнения движения системы получаются из данного принципа в результате решения более сложной задачи об условном экстремуме (при условии (6)), для интеграла (7) с переменным верхним пределом.

6. Действие по Лагранжу и его различные формы. Возьмем выражение (4) действия по Гамильтону

$$S = \int_{t_0}^{t} (T - V)\, dt,$$

считая в нем верхний предел переменным. Подставим сюда значение V из интеграла энергии (6)

$$V = -U = h - T;$$

получим

$$S = \int_{t_0}^{t} (2T - h)\, dt,$$

что дает

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\, dt - h(t - t_0) = W - h(t - t_0).$$

При рассмотрении метода Якоби для склерономной системы в теории канонических уравнений мы видели, что главная функция Гамильтона S выражается через характеристическую функцию W формулой

$$S = -ht + W.$$

Так как мы установили, что функция S совпадает с действием по Гамильтону, то из сравнения с предыдущей записью вытекает, что с точностью до несущественной аддитивной постоянной действие по Лагранжу W совпадает с характеристической функцией метода Якоби.

Если в формулу действия (7), данную Лагранжем, подставить какое-либо выражение кинетической энергии, то действие в форме Лагранжа может быть взято в других видах, например,

$$W = \int_{t_0}^{t} \sum m_i v_i^2\, dt; \qquad \text{(a)}$$

в частности, в независимых координатах будем иметь

$$W = \int_{t_0}^{t} \sum_{r,\rho=1}^{s} A_{r\rho} \dot{q}_r \dot{q}_\rho\, dt. \qquad \text{(b)}$$

Если в (a) произвести замену $v_i dt = ds_i$, где ds_i — элемент дуги траектории точки, то действию W можно придать вид:

$$W = \int_{(A)}^{(B)} \sum m_i v_i ds_i. \tag{9}$$

Действие в этой форме называется *действием в форме Мопертюи*. Интегрирование здесь происходит по дугам траекторий точек системы при ее перемещении из A в B.

Пользуясь интегралом энергии (6), можно придать действию чисто геометрический характер, полностью исключив время.

Так как

$$2T = \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2,$$

а из интеграла (6)

$$2T = 2(U + h),$$

то (c)

$$\sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2 = 2(U + h);$$

отсюда

$$dt = \sqrt{\frac{\sum m_i ds_i^2}{2(U+h)}}.$$

Подставляя это значение, а также значение $2T$ из (c) в формулу (7), находим

$$W = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(U+h)} \cdot \sqrt{\sum m_i ds_i^2}. \tag{10}$$

Здесь, как и в (9), интегрирование производится по дугам траекторий от A до B. Выражение (10) называется *действием в форме Якоби*.

Если же исходить из выражения (b) для $2T$, то действию по Якоби путем аналогичных рассуждений можно придать вид:

$$W = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(U+h)} \cdot \sqrt{\sum_{r,\rho=0}^{s} A_{r\rho}\, dq_r\, dq_\rho}. \tag{10'}$$

Действие в форме (9), (10) или (10′) находит важные применения в вопросах теоретической физики.

7. Оптико-механическая аналогия. Можно указать также на интересную оптико-механическую аналогию, существующую между распространением светового луча в изотропной оптически неоднородной среде и движе-

нием материальной точки, происходящим в условиях, при которых справедлив принцип наименьшего действия.

Действие по Якоби (10) для одной материальной точки может быть переписано в виде

$$W = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2m\,[h - V(x,\ y,\ z)]}\,ds. \qquad \text{(a)}$$

В оптически отднородной среде луч света распространяется по прямой с постоянной скоростью. Если же среда оптически неоднородна, то скорость света $u = u(x,\ y,\ z)$ будет в ней переменной величиной, а сам луч, испытывая постоянное преломление, примет форму некоторой кривой. В этом случае будет справедлив принцип Ферма, говорящий о том, что распространение монохроматического света в изотропной оптически неоднородной среде из точки A в точку B происходит по такой кривой, что время T распространения света является минимальным по сравнению с любыми другими кривыми, соединяющими те же точки.

Для прохождения каждого элемента дуги ds светового луча, потребуется время $dt = ds/u$, поэтому полное время прохождения луча от точки A к точке B представится интегралом

$$T = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{u(x,\ y,\ z)} = \frac{1}{c}\int_{(A)}^{(B)} n(x,\ y,\ z)\,ds, \qquad \text{(b)}$$

где с есть скорость света в пустоте, а $n(x,\ y,\ z)$ — переменный показатель преломления среды.

Сравнивая функционалы (a) и (b), видим, что вытекающая из принципа Ферма вариационная задача на минимум интеграла (b) оказывается аналогичной задаче о минимуме действия по Якоби (a). Решая первую задачу, мы найдем траекторию светового луча, а решая вторую—траекторию материальной точки. Эти траектории будут совпадать, если подынтегральные функции в (a) и (b) будут пропорциональны друг другу, то есть если

$$n(x,\ y,\ z) = \kappa\sqrt{h - V(x,\ y,\ z)},$$

где κ — не варьируемый постоянный коэффициент пропорциональности.

Таким образом, решение какой-либо задачи динамики точки, движущейся свободно или подчиненной склерономным связям и находящейся под действием консервативных сил, дает решение соответствующей задачи оптики, и наоборот.

8. Движение точки по гладкой поверхности по инерции. Пусть материальная точка движется по идеально гладкой поверхности по инерции, то есть при отсутствии активных сил. Тогда интеграл энергии дает

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{const},$$

откуда $v = \text{const}$ вдоль траектории точки.

Покажем на этом простом примере, в чем состоит принципиальная разница между двумя рассмотренными принципами.

Так как в данном случае $U = C$, то действие по Гамильтону при $t_0 = 0$ будет

$$S = \int_0^t (T + U)\,dt = \int_0^t \left(\frac{1}{2}mv^2 + C\right)dt = \frac{1}{2}mv^2t + Ct.$$

Для всех кинематически допустимых движений время перемещения точки из начального положения A в конечное B одно и то же; поэтому уравнение принципа Гамильтона — Остроградского $\delta S = 0$ дает

$$t\delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

или

$$\delta(v^2) = 0;$$

отсюда следует, что для действительного движения v имеет стационарное значение, которое, в соответствии со сказанным при выводе данного принципа, будет минимумом. Следовательно, из всех кинематически допустимых движений, при которых точка переходит из A в B за одно и то же время, в действительности будет осуществляться то, которое происходит с наименьшей скоростью. А так как пройденный по траектории путь есть $s = vt$, то s тоже будет иметь минимум, и, следовательно, движение будет происходить по кратчайшему пути, то есть по геодезической линии.

Переходя к принципу наименьшего действия, будем иметь для действия по Лагранжу

$$W = \int_0^t mv^2\,dt = mv^2t.$$

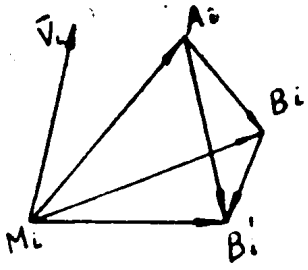
Уравнение принципа $\Delta W = 0$ дает

$$\Delta(mv^2t) = 0.$$

В силу одинакового значения h во всех сравниваемых

движениях, из интеграла энергии $\frac{1}{2}mv^2 = h$ будем иметь, что скорость во всех движениях одна и та же, поэтому $\Delta t = 0$. Следовательно, из всех кинематически допустимых движений, переводящих точку из A в B, в действительности будет совершаться то движение, которое происходит за минимальное время. А так как по-прежнему $s = vt$, то движение будет происходить по кратчайшему пути, то есть по геодезической линии поверхности.

9. Принцип наименьшего принуждения Гаусса. Как мы видели ранее, принцип Даламбера — Лагранжа позволяет получить уравнения движения системы при любых голономных связях; что же касается неголономных систем, то их уравнения движения можно составить лишь для случая неголономных связей, линейных относительно скоростей. Существует, однако, другой дифференциальный вариационный принцип, именно принцип наименьшего принуждения Гаусса, позволяющий установить уравнения движения системы как при голономных, так и любых неголономных идеальных связях. Таким образом, принцип Гаусса является одним из наиболее общих принципов механики.



Фиг. 185

Выясним сначала понятие принуждения. Пусть в момент t какая-либо точка системы находится в положении M_i (фиг. 185), имея скорость v_i. Если бы, начиная с этого момента, систему освободить от связей, то точка, двигаясь свободно под действием только активных сил, за малый промежуток времени τ испытала бы некоторое перемещение $\overline{M_iA_i}$. В действительном же движении, подчиненном действию связей, точка получит за то же время другое перемещение $\overline{M_iB_i}$.

Применяя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь членами второго порядка малости относительно τ, имеем

$$r_i(t+\tau) = r_i(t) + \dot{r}_i(t)\tau + \frac{1}{2}\ddot{r}_i(t)\tau^2.$$

Пользуясь этим выражением и учитывая, что $\dot{r}_i(t) = v_i$, а $\ddot{r}_i(t)$ есть ускорение точки, равное для свободного движения

$$\ddot{r}_i(t) = \frac{F_i}{m_i},$$

а для несвободного —

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t) = \boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i}{m_i},$$

можем указанные перемещения взять в виде

$$\overline{M_iA_i} = \boldsymbol{v}_i\tau + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\tau^2,$$

$$\overline{M_iB_i} = \boldsymbol{v}_i\tau + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i}{m_i}\tau^2.$$

Тогда отклонение точки в ее истинном движении от свободного в момент $t+\tau$ окажется равным

$$\overline{A_iB_i} = \overline{M_iB_i} - \overline{M_iA_i} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{R}_i}{m_i}\tau^2 \qquad \text{(a)}$$

или

$$\overline{A_iB_i} = \frac{\tau^2}{2}\left(\boldsymbol{w}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right). \qquad \text{(b)}$$

Гаусс назвал принуждением (по немецки Zwang) для одной точки величину, пропорциональную квадрату отклонения точки от свободного движения

$$Z\boldsymbol{w}_i = \frac{1}{2}m_i\left(\boldsymbol{w}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2,$$

а для всей системы —

$$Z\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} Z\boldsymbol{w}_i = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\boldsymbol{w}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2. \qquad (11)$$

Таким образом, *принуждением называется представляемая формулой (11) мера отклонения истинного движения системы от того свободного движения, которое она получила бы, если в рассматриваемый момент времени отбросить все связи.*

Выражая входящие в (11) векторы через проекции на оси координат, получим другую запись принуждения —

$$Z\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\ddot{x}_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2. \qquad (11')$$

Для вывода принципа заменим входящие в (11) разности из выражений вида (b); получим

$$Z\boldsymbol{w} = \frac{2}{\tau^4}\sum m_i\overline{A_iB_i}^2. \qquad \text{(c)}$$

Пусть $\overline{M_iB_i'}$ (фиг. 185) — другое кинематически допустимое перемещение точки за время τ. Тогда принуждение для всякого кинематически допустимого движения, отличного от действительного, можно записать в виде

$$Zw' = \frac{2}{\tau^4}\sum m_i\overline{A_iB_i'}^2.$$

Подставляя сюда значение

$$\overline{A_iB_i'} = \overline{A_iB_i} + \overline{B_iB_i'},$$

получающееся из фиг. 185, находим

$$Zw' = \frac{2}{\tau^4}\sum m_i\overline{A_iB_i}^2 + \frac{2}{\tau^4}\sum m_i\overline{B_iB_i'}^2 + \frac{4}{\tau^4}\sum m_i(\overline{A_iB_i}\cdot\overline{B_iB_i'}). \quad (d)$$

Так как положения B_i и B_i' точки системы отвечают одному и тому же моменту времени $t+\tau$, то при достаточно малом τ вектор $\overline{B_iB_i'} = \delta r_i$ есть виртуальное перемещение точки; учитывая еще значение $\overline{A_iB_i}$ по (a), находим

$$\frac{4}{\tau^4}\sum m_i(\overline{A_iB_i}\cdot\overline{B_iB_i'}) = \frac{2}{\tau^2}\sum R_i\cdot\delta r_i,$$

что равно нулю в силу идеальности связей. Поэтому выражение (d) с учетом (c) принимает вид:

$$Zw' = Zw + \frac{2}{\tau^4}\sum m_i(\delta r_i)^2.$$

Отсюда следует

$$Zw' > Zw,$$

то есть в действительном движении принуждение имеет наименьшее значение.

Учитывая, что в момент t точки системы во всех кинематически допустимых движениях занимали те же положения и имели те же скорости, что и в истинном движении, можем принципу Гаусса дать следующую формулировку:

Действительное движение системы, подчиненной произвольным идеальным удерживающим связям, отличается в каждый момент времени от кинематически допустимых движений, совершающихся из той же исходной конфигурации и с теми же исходными скоростями, тем, что для него принуждение имеет минимум.

Математическим выражением принципа будет уравнение

$$\delta Zw = 0,$$

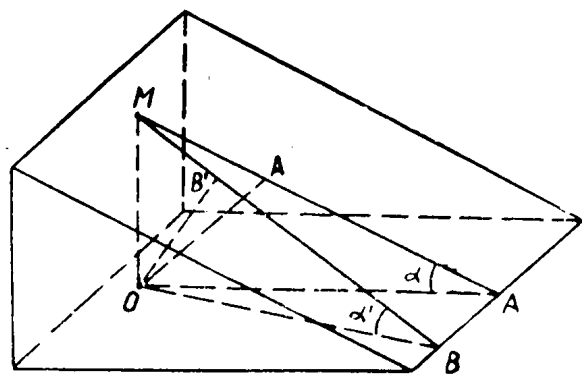
причем согласно условию относительно положения и скоростей в сравниваемых движениях варьировать следует

только ускорения. Поэтому, пользуясь выражением (11′) принуждения, уравнение принципа можем записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{X}_\nu - m_\nu\ddot{\boldsymbol{x}}_\nu)\,\delta\ddot{\boldsymbol{x}}_\nu = 0, \qquad (12)$$

то есть в том же виде, что и уравнение принципа Даламбера — Лагранжа, с той только разницей, что вариации координат заменены вариациями соответствующих ускорений.

Проиллюстрируем принцип Гаусса следующим простым примером. Пусть тяжелая материальная точка движется без начальной скорости по гладкой наклонной плоскости (фиг. 186), составляющей угол α с горизонтом. Если бы



Фиг. 186

связи не было, то точка, падая свободно, испытала бы за время τ некоторое перемещение по вертикали $MO = \frac{1}{2}g\tau^2$. В действительности же точка будет двигаться по линии наибольшего ската MA и за время τ пройдет путь $MA' = \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot\tau^2 = MO\cdot\sin\alpha$. Кинематически допустимым будет и перемещение по всякой прямой MB, причем это перемещение за то же время будет $MB' = \frac{1}{2}g\sin\alpha'\cdot\tau^2 = MO\cdot\sin\alpha'$. Длины перемещений MA' и MB' получаются на прямых MA и MB, если из точки O опустить перпендикуляры OA' и OB' на эти прямые. Поэтому длины этих перпендикуляров явятся отклонениями точки от свободного движения в действительном и другом кинематически допустимом движении соответственно. Но

$$OA' = OM\cdot\cos\alpha, \quad OB' = OM\cdot\cos\alpha'.$$

Так как $\alpha > \alpha'$, то $OA' < OB'$, откуда и следует, что $Zw < Zw'$, то есть что принуждение в истинном движении будет наименьшим.

10. Получение уравнений движения системы из принципа Гаусса. Если система свободна, то все вариации ускорений $\delta\ddot{x}_\nu$ независимы между собой, и из уравнения (12), как и в принципе Даламбера — Лагранжа, получаем уравнения движения свободной системы

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Пусть теперь несвободная система подчинена κ уравнениям голономных связей

$$f_j(x, t) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa) \qquad \text{(a)}$$

и l уравнениям неголономных связей любого вида

$$\varphi_h(x, \dot{x}, t) = 0 \ (h = 1, 2, \ldots, l). \qquad \text{(b)}$$

Дифференцируя по времени уравнения (a) дважды, а уравнения (b) один раз, придем к равенствам

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \ddot{x}_\nu + F_j(x, \dot{x}, t) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa),$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{x}_\nu} \ddot{x}_\nu + \Phi_h(x, \dot{x}, t) = 0 \ (h = 1, 2, \ldots, l),$$

где через F_j и Φ_h обозначены выражения, не содержащие ускорений. Варьируя эти равенства, имея в виду, что варьируются только ускорения, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \delta\ddot{x}_\nu = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, \kappa), \qquad \text{(c)}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{x}_\nu} \delta\ddot{x}_\nu = 0 \ (h = 1, 2, \ldots, l). \qquad \text{(d)}$$

Далее применяем метод Лагранжа, умножая каждое уравнение (c) на неопределенный множитель λ_j, а каждое уравнение (d) — на множитель μ_h; складывая результаты умножения между собой и с уравнением принципа Гаусса (12), придем к равенству

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{x}_\nu} \right) \delta\ddot{x}_\nu = 0. \qquad \text{(e)}$$

В этом равенстве $\kappa+l$ вариаций ускорений, как связанных условиями (c) и (d), будут зависеть от остальных $N-(\kappa+l)$ вариаций. Распорядимся множителями λ_j и μ_h, число которых тоже равно $\kappa+l$, так, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях обратились в нуль; тогда в равенстве (e) обратятся в нуль и коэффициенты при остальных вариациях в силу их независимости. Таким путем придем к уравнениям движения системы

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \sum_{h=1}^{l} \mu_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{x}_\nu} = 0 \quad (\nu=1, 2, \ldots, N). \quad (13)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связей (a) и (b), получим полную систему $N+\kappa+l$ уравнений для такого же числа функций x_ν, λ_j, μ_h.

11. Принцип прямейшего пути Герца. Принцип Герца является следствием из принципа Гаусса для случая движения системы, подчиненной голономным и склерономным связям и свободной от действия активных сил.

Герц вводит понятие о траектории системы, понимая под ней кривую N-мерного пространства, элемент дуги которой ds определяется равенством

$$ds^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i ds_i^2 = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu dx_\nu^2.$$

Вводя новые переменные

$$\xi_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{M}}\, x_\nu,$$

можем ds^2 записать в виде, аналогичном выражению ds^2 в трехмерном пространстве

$$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{N} d\xi_\nu^2. \quad (a)$$

Величину

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Герц называет скоростью системы. Имеем для нее очевидное равенство

$$\dot{s}^2 = \Sigma \dot{\xi}_\nu^2. \quad (b)$$

Обобщая также понятие о кривизне кривой трехмерного пространства

$$\kappa^2 = \frac{1}{\rho^2} = \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} \right)^2,$$

назовем величину κ, определяемую равенством

$$\kappa^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{d^2\xi_\nu}{ds^2}\right)^2, \qquad \text{(c)}$$

кривизной рассматриваемой траектории системы в N-мерном пространстве.

Вследствие отсутствия активных сил принуждение, согласно (11′), запишется в виде

$$Zw = \frac{1}{2}\sum m_\nu \ddot{x}_\nu^2$$

или в новых переменных

$$Zw = \frac{M}{2}\sum \ddot{\xi}_\nu^2.$$

Так как

$$\dot{\xi}_\nu = \frac{d\xi_\nu}{ds}\dot{s}, \quad \ddot{\xi}_\nu = \frac{d^2\xi_\nu}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{d\xi_\nu}{ds}\ddot{s},$$

то

$$\ddot{\xi}_\nu^2 = \left(\frac{d^2\xi_\nu}{ds^2}\right)^2 \dot{s}^4 + \left(\frac{d\xi_\nu}{ds}\right)^2 \ddot{s}^2 + 2\frac{d\xi_\nu}{ds}\frac{d^2\xi_\nu}{ds^2}\dot{s}^2\ddot{s}.$$

Поэтому для принуждения будем иметь

$$\frac{2}{M}Zw = \dot{s}^4 \sum \left(\frac{d^2\xi_\nu}{ds^2}\right)^2 + \ddot{s}^2 \sum \left(\frac{d\xi_\nu}{ds}\right)^2 + 2\dot{s}^2\ddot{s}\sum \frac{d\xi_\nu}{ds}\frac{d^2\xi_\nu}{ds^2}. \qquad \text{(d)}$$

Из (a) следует

$$\sum \left(\frac{d\xi_\nu}{ds}\right)^2 = 1;$$

дифференцируя по s, имеем отсюда

$$\sum \frac{d\xi_\nu}{ds}\frac{d^2\xi_\nu}{ds^2} = 0.$$

Принимая еще во внимание (c), можем (d) переписать в виде

$$\frac{2}{M}Zw = \kappa^2\dot{s}^4 + \ddot{s}^2.$$

Так как активные силы отсутствуют, а связи склерономны, то имеет место интеграл энергии $T = \text{const}$. В силу же (b)

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\nu \dot{x}_\nu^2 = \frac{M}{2}\sum \dot{\xi}_\nu^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^2.$$

Поэтому интеграл энергии дает $\dot{s} = \text{const}$, $\ddot{s} = 0$. Окончательно имеем

$$\frac{2}{M} Z w = \kappa^2 \dot{s}^4.$$

Отсюда следует, что для минимума принуждения кривизна κ должна быть минимальной. Получаем следующий *принцип прямейшего пути Герца.*

Если система материальных точек подчинена склерономным связям и свободна от действия активных сил, то ее истинное движение происходит с постоянной скоростью по траектории, имеющей наименьшую кривизну по сравнению со всеми другими траекториями, допускаемыми связями.

Принцип Герца можно рассматривать как обобщение закона инерции Галилея—Ньютона на случай несвободной системы. Исходя из этого, сам Герц формулировал свой принцип так: *всякая свободная система стремится пребывать в состоянии покоя или равномерного движения по прямейшему пути.* При этом в его понимании термин „свободная" имел особый смысл. В своей механике он рассматривал силы как эффект явных или скрытых связей; поэтому под „свободной системой" он понимал систему, находящуюся под действием только наложенных на нее явных связей.

В динамике точки мы рассмотрели пример о движении точки по инерции по идеально гладкой поверхности вращения. Мы видели, что точка в этом случае движется с постоянной скоростью по геодезической линии поверхности. А так как эта линия и есть как раз кривая наименьшей кривизны из всех кривых, лежащих на поверхности и соединяющих любые две ее точки, то эта задача является как раз иллюстрацией принципа Герца.

§ 48. Канонические преобразования

1. Понятие о канонических преобразованиях и производящей фукции. Из вида канонических уравнений

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, s)$$

вытекает, что с математической точки зрения координаты q_r и импульсы p_r равноправны. Поэтому, наряду с точечными преобразованиями вида $Q_r = Q_r(q, t)$, где Q_r — новые координаты, можно рассматривать преобразования

$$Q_r = Q_r(q, p, t), \; P_r = P_r(q, p, t) \; (r = 1, 2, \ldots, s), \quad (1)$$

где P_r — новые „импульсы". Таким образом, как новые ко-

ординаты, так и новые импульсы могут зависеть от старых координат и импульсов, а также от времени t.

Будем искать такие преобразования (1), при которых новые переменные Q_r, P_r тоже являются каноническими. Это означает, что должна существовать такая функция новых переменных $K = K(Q, P, t)$, которая играла бы для них роль функции Гамильтона H и которая, поэтому, позволяла бы записать дифференциальные уравнения для новых переменных в канонической форме

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{2}$$

Каноническими преобразованиями и называются преобразования типа (1), при которых для новых переменных будут иметь место уравнения (2).

Канонические преобразования имеют важное значение для статистической физики и квантовой теории. Они играют важную роль и в самой теоретической механике, предоставляя известную свободу в выборе величин, которые принимаются за „координаты“ и „импульсы“. Это в свою очередь, может существенно облегчить получение интегралов движения.

Возьмем действие по Гамильтону

$$S = \int_{t_0}^{t} L dt.$$

Так как, согласно (46—4),

$$H(q, p, t) = \left(-L + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r \right)_{\dot{q} \to p},$$

а

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = p_r,$$

то будем иметь

$$L = \sum p_r \dot{q}_r - H(q, p, t).$$

Поэтому действию по Гамильтону можно придать вид

$$S = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum p_r \dot{q}_r - H(q, p, t) \right\} dt. \tag{3}$$

Это выражение можно назвать действием по Гамильтону, выраженным в канонических переменных.

Поскольку новые переменные Q_r, P_r тоже канонические, а функцией Гамильтона для них является функция $K(Q, P, t)$,

то в этих переменных действие по Гамильтону должно иметь вид:

$$S = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum P_r \dot{Q}_r - K(Q, P, t) \right\} dt. \qquad (4)$$

Так как уравнение принципа Гамильтона—Остроградского есть $\delta S = 0$, то действие, определенное по (4), должно отличаться от действия (3) не более как на функцию, вариация которой равна нулю. Этого можно достичь, полагая, что выражения под знаками интегралов в (3) и (4) отличаются друг от друга на полную производную по времени от некоторой однозначной функции F старых и новых переменных. В самом деле, интеграл от такой производной

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dF}{dt}\, dt = F(B) - F(A)$$

имеет единственное значение, определяемое значениями функции в крайних фиксированных положениях системы A и B, откуда следует, что его вариация равна нулю.

Как увидим далее, выбор функции F однозначно определяет каноническое преобразование (1). Поэтому функция F называется *производящей функцией* данного преобразования.

Производящая функция может зависеть от времени t и от $4s$ переменных q_r, p_r, Q_r, P_r. Так как, однако, эти переменные связаны $2s$ соотношениями (1), то независимых из них будет только $2s$. В качестве таких переменных возьмем s старых (q_r или p_r) и s новых (тоже Q_r или P_r), ибо при ином выборе независимых переменных преобразование (1) не получается. Поэтому производящую функцию следует брать в одном из следующих видов:

$$F_1(q, Q, t),\ F_2(q, P, t),\ F_3(p, Q, t),\ F_4(p, P, t).$$

Можно пользоваться любым из этих видов, в зависимости от особенностей рассматриваемой задачи.

2. Частные виды производящей функции. Возьмем производящую функцию в виде F_1; тогда подынтегральные функции в (3) и (4) должны быть связаны соотношениями

$$\sum p_r \dot{q}_r - H = \sum P_r \dot{Q}_r - K + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t), \qquad (5)$$

где

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial q_r} \dot{q}_r + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_r} \dot{Q}_r + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Подставляя последнее выражение в (5) и перенося все члены в одну сторону, находим:

$$\sum\left(p_r - \frac{\partial F_1}{\partial q_r}\right)\dot{q}_r - \sum\left(P_r + \frac{\partial F_1}{\partial Q_r}\right)\dot{Q}_r - H + K - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0.$$

Так как за независимые переменные приняты q_r и Q_r, то производные $\dot{q}_r$ и $\dot{Q}_r$ будут тоже независимы между собой. Поэтому последнее равенство может иметь место только в том случае, если коэффициенты при этих производных и свободный член равны нулю.

Таким образом получаем:

$$\dot{p}_r = \frac{\partial F_1}{\partial q_r}; \tag{6}$$

$$P_r = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_r}; \tag{6'}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{6''}$$

Разрешая соотношения (6) относительно переменных Q_r, находим $Q_r = Q_r(q, p, t)$, то есть первую группу преобразований (1); подставляя эти выражения в правые части уравнений (6'), получаем вторую группу тех же преобразований $P_r = P_r(q, p, t)$. Формула же (6'') даст функцию Гамильтона для новых переменных, если в правой части заменить q, p через новые переменные из равенств (1).

При производящей функции в форме F_2 предыдущий путь становится неприменимым, ибо F_2 зависит от новых импульсов P_r, производные от которых не входят в (4). Поэтому полагаем в формуле (5)

$$\sum P_r \dot{Q}_r = \frac{d}{dt}\sum P_r Q_r - \sum \dot{P}_r Q_r.$$

Подставляя и перегруппировывая члены, получим

$$\sum p_r \dot{q}_r + \sum Q_r \dot{P}_r + K - H = \frac{d}{dt}\left[F_1(q, Q, t) + \Sigma P_r Q_r\right]. \tag{a}$$

Принимаем в этом равенстве за независимые переменные q_r и P_r. Тогда $Q_r = Q_r(q, P, t)$ и мы можем положить в (a)

$$F_1(q, Q, t) + \sum P_r Q_r = F_2(q, P, t).$$

Расписывая производную от F_2, можем равенству (a) придать вид:

$$\sum\left(p_r - \frac{\partial F_2}{\partial q_r}\right)\dot{q}_r + \sum\left(Q_r - \frac{\partial F_2}{\partial P_r}\right)\dot{P}_r + K - H - \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0,$$

откуда тем же рассуждением, что и в первом случае, находим

$$p_r = \frac{\partial F_2}{\partial q_r}; \tag{7}$$

$$Q_r = \frac{\partial F_2}{\partial P_r}; \tag{7'}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{7''}$$

Разрешая равенства (7) относительно P_r, найдем вторую группу преобразований (1), а подставляя полученные выражения в (7'), получим первую группу (1).

Для перехода к производящей функции вида F_3 полагаем в (5)

$$\sum p_r \dot{q}_r = \frac{d}{dt}\sum p_r q_r - \sum q_r \dot{P}_r;$$

получим

$$-\sum q_r \dot{p}_r - \sum P_r \dot{Q}_r + K - H = \frac{d}{dt}[F_1(q, Q, t) - \Sigma p_r q_r]. \text{ (b)}$$

Принимая в этом равенстве за независимые переменные p_r и Q_r, полагаем в правой части $q_r = q_r(p, Q, t)$. Обозначая результат этой подстановки через $F_2(p, Q, t)$ и заменяя производную от F_3 подробной записью, можем переписать (b) в виде:

$$-\sum\left(q_r + \frac{\partial F_3}{\partial p_r}\right)\dot{P}_r - \sum\left(P_r + \frac{\partial F_3}{\partial Q_r}\right)\dot{Q}_r + K - H - \frac{\partial F_3}{\partial t} = 0.$$

Отсюда в силу независимости $\dot{p}_r$ и $\dot{Q}_r$

$$q_r = -\frac{\partial F_3}{\partial p_r}, \tag{8}$$

$$P_r = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_r}, \tag{8'}$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \tag{8''}$$

Из (8) находим $Q_r = Q_r(q, p, t)$, а подставляя эти выражения в правые части (8'), получаем $P_r = P_r(q, p, t)$.

К производящей функции вида F_4 можно прийти, полагая в (5)

$$\sum p_r \dot{q}_r = \frac{d}{dt}\sum p_r q_r - \sum q_r \dot{p}_r:$$

$$\sum P_r \dot{Q}_r = \frac{d}{dt} \sum P_r Q_r - \sum Q_r \dot{P}_r.$$

Тогда получим

$$-\sum q_r \dot{p}_r + \sum Q_r \dot{P}_r + K - H = \frac{d}{dt} [F_1(q, Q, t) + - \Sigma p_r q_r + \Sigma P_r Q_r]. \quad (c)$$

Принимая за независимые переменные p_r и P_r, считая в правой части $q_r = q_r(p, P, t)$, $Q_r = Q_r(p, P, t)$, вводим обозначение

$$F_1(q, Q, t) - \Sigma p_r q_r - \Sigma P_r Q_r = F_4(p, P, t).$$

Расписывая в (c) производную от F_4, придем к равенству:

$$-\sum\left(q_r + \frac{\partial F_4}{\partial p_r}\right)\dot{p}_r + \sum\left(Q_r - \frac{\partial F_4}{\partial P_r}\right)\dot{P}_r + K - H - \frac{\partial F_4}{\partial t} = 0.$$

Отсюда будем иметь:

$$q_r = -\frac{\partial F_4}{\partial p_r}; \quad (9)$$

$$Q_r = \frac{\partial F_4}{\partial P_r}; \quad (9')$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (9'')$$

$P_r = P_r(q, p, t)$ найдутся из (9), а равенства (9′) дадут $Q_r = Q_r(q, p, t)$.

Видим, что если производящие функции не зависят явно от t, то во всех случаях $K = H$; при этом входящие в H переменные q_r, p_r нужно заменить через новые Q_r, P_r из формул соответствующего преобразования.

3. Примеры канонических преобразований. а) Возьмем производящую функцию типа F_2 в виде

$$F_2 = \Sigma f_r(q, t) P_r,$$

где f_r — произвольные функции своих аргументов. Согласно (7′) будем иметь

$$Q_r = \frac{\partial F_2}{\partial P_r} = f_r(q, t). \quad (a)$$

Тем самым пришли к общему виду точечного преобразования. Отсюда следует, что все точечные преобразования являются каноническими.

Новая функция Гамильтона найдется по (7″)

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \sum \frac{\partial f_r}{\partial t} P_r;$$

здесь только нужно координаты q_ρ заменить из соотношений (a), а импульсы p_ρ — из равенств (7), принимающих в данном случае вид:

$$p_\rho = \frac{\partial F_2}{\partial q_\rho} = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial f_r}{\partial q_\rho} P_r.$$

Пусть, например, точечное преобразование (a) есть линейное ортогональное преобразование вида

$$f_r = Q_r = \sum_{\rho=1}^{s} a_{r\rho}\, q_\rho, \tag{b}$$

причем

$$\sum_{\rho=1}^{s} a_{r\rho}\, a_{j\rho} = \delta_{rj} = \begin{cases} 1, & r = j, \\ 0, & r \neq j. \end{cases} \tag{c}$$

Тогда

$$F_2 = \sum_{r,\ \rho=1}^{s} a_{r\rho}\, q_\rho\, P_r,$$

$$p_\rho = \frac{\partial F_2}{\partial q_\rho} = \sum_{r=1}^{s} a_{r\rho}\, P_r \quad (\rho = 1, 2, \ldots s).$$

Для решения последних уравнений относительно P_r, умножаем обе части каждого уравнения на $a_{j\rho}$ и суммируем их по ρ; с учетом (c) получим:

$$\sum_{\rho=1}^{s} a_{j\rho}\, p_\rho = \sum_{r=1}^{s} P_r \sum_{\rho=1}^{s} a_{r\rho}\, a_{j\rho} = \sum \delta_{rj}\, P_r.$$

Так как при каждом j в правой части остается один только член, для которого $j = r$, то отсюда находим:

$$P_r = \sum_{\rho=1}^{s} a_{r\rho}\, p_\rho.$$

Таким образом, новые импульсы получаются из старых по таким же формулам ортогонального преобразования, что и новые координаты (формулы (b)).

b. Рассмотрим производящую функцию

$$F_1 = \Sigma\, q_r\, Q_r.$$

По (6) и (6′) будем иметь

$$p_r = \frac{\partial F_1}{\partial q_r} = Q_r, \qquad P_r = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_r} = -q_r.$$

Следовательно, при этом преобразовании координаты и импульсы меняются ролями. Этот пример хорошо иллюстрирует равноправность положения обобщенных координат и обобщенных импульсов.

Функция Гамильтона для новых переменных будет:

$$K = H(q, p, t) = H(-P, Q, t).$$

Непосредственно видно, что канонические уравнения

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

при замене q_r на $-P_r$, p_r на Q_r, H на K сохранят свою каноническую форму.

4. Применение канонического преобразования в теории возмущений. Пусть для невозмущенного движения некоторой системы функция Гамильтона есть $H_0 = H_0(q, p, t)$. Тогда главная функция Гамильтона

$$S = \tilde{S}(q_1, \ldots, q_s; t; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + \alpha_{s+1}$$

есть полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q, t, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{a}$$

Разрешая интегралы Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \beta_r \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r \ (r = 1, 2, \ldots, s) \tag{b}$$

относительно канонических переменных, получим:

$$q_r = q_r(t, \alpha, \beta), \quad p_r = p_r(t, \alpha, \beta), \tag{c}$$

где под α, β понимаются все $2s$ произвольных постоянных α_r, β_r $(r = 1, 2, \ldots, s)$.

Если в S отбросить несущественную постоянную α_{s+1}, принять остальные постоянные α_r за новые координаты Q_r и полученную функцию

$$S(q, Q, t) \equiv F_1(q, Q, t)$$

рассматривать как производящую функцию первого вида, то с помощью формул (6), (6′), (6″) получим:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}, \quad P_r = -\frac{\partial S}{\partial Q_r}, \quad K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{d}$$

Первые из этих равенств совпадают с интегралами второй группы (b), а сличение вторых с интегралами первой группы (b) дает $\beta_r = -P_r$; в силу же уравнения (a) последнее соотношение (d) означает, что $K \equiv 0$. Поэтому для невозмущенного движения канонические уравнения в новых переменных будут

$$\frac{d\alpha_r}{dt} = \frac{dQ_r}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_r}{dt} = -\frac{dP_r}{dt} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

что находится в соответствии с постоянством α_r и β_r в этом движении.

Для всякого возмущенного движения функция Гамильтона будет отличаться от функции H_0. Возьмем ее в виде $H = H_0 - H_1$. Тогда при том же выборе новых канонических переменных и при той же производящей функции будем иметь:

$$K = H_0 - H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = -H_1;$$

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r} = -\frac{\partial H_1}{\partial P_r}; \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} = \frac{\partial H_1}{\partial Q_r};$$

а так как $P_r = -\beta_r$, $Q_r = \alpha_r$, получим окончательно

$$\frac{d\alpha_r}{dt} = \frac{\partial H_1}{d\beta_r}, \quad \frac{d\beta_r}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r}. \tag{e}$$

Отсюда следует, что в возмущенном движении α_r и β_r окажутся функциями времени, определяемыми из решения системы (e). Из интегралов этой системы можем получить

$$\alpha_r = \alpha_r(t, a, b), \quad \beta_r = \beta_r(t, a, b),$$

где a_r и b_r $(r = 1, 2, \ldots, s)$ — постоянные интегрирования.

После подстановки этих выражений в равенства (c) получаем для возмущенного движения

$$q_r = q_r[t, \alpha(t, a, b), \beta(t, a, b)], \quad p_r = p_r[t, \alpha(t, a, b), \beta(t, a, b)]. \tag{f}$$

Применим полученные результаты к возмущенному движению некоторой планеты P, вызываемому влиянием другой планеты P_1. Пусть в системе отсчета с началом в центре масс солнца координаты P будут x, y, z, P_1 — x_1, y_1, z_1; массы планет обозначим соответственно через m и m_1.

Как известно (§ 23, п. 4) потенциал силы притяжения планеты P к солнцу есть

$$U_0 = \frac{\mu m}{r},$$

где μ — гауссова постоянная, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Если же учесть влияние планеты P_1, то общий потенциал будет

$$U = m\left(\frac{\mu}{r} + R\right),$$

где R есть возмущающая функция, зависящая от m_1 и координат обеих планет. Отсюда получаем три уравнения возмущенного движения планеты P вида

$$m\ddot{x} = m\left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}\right)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}. \qquad (g)$$

Эти уравнения имеют такой вид, как если бы было $m = 1$. Поэтому далее считаем

$$U = U_0 + R, \qquad (h)$$

где

$$U_0 = \frac{\mu}{r}.$$

Выражая координаты x, y, z через какие-то обобщенные координаты q_1, q_2, q_3, можем каждое уравнение (g) заменить парой канонических уравнений вида:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \ (r = 1, 2, 3),$$

при этом согласно (46.7)

$$H = \overline{T} + V = \overline{T} - U,$$

где $\overline{T}$ — кинетическая энергия планеты P, выраженная в канонических переменных. Но это выражение согласно (h) можно переписать в виде

$$H = H_0 - R,$$

где $H_0 = \overline{T} - U_0$ есть функция Гамильтона для невозмущенного движения планеты по эллиптической орбите. Видим, что в данном случае $H_1 = R$, и уравнения (e) для переменных значений α_r и β_r, отвечающих возмущенному движению, принимают вид:

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial R}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}.$$

Найдя решение этих уравнений, можем закон возмущенного движения планеты найти по формулам (f), в которых постоянные a_r и b_r следует найти по начальным данным.

5. Циклические координаты и метод Якоби. В § 46, п. 3 мы видели, что если все независимые координаты циклические, то все импульсы постоянны; если же, кроме того, система склерономна, то функция Гамильтона будет зависеть только от постоянных импульсов, и первая группа канонических уравнений полностью интегрируется, причем все координаты оказываются линейными функциями времени; тем самым найдутся все независимые интегралы канонической системы.

Возьмем каноническое преобразование с производящей функцией

$$F_2(q, P, t)$$

и потребуем, чтобы в формулах (7), (7′) и (7″) новые координаты Q_r, импульсы P_r и новая функция Гамильтона K удовлетворяли бы всем этим условиям. В таком случае

$$P_r = \alpha_r \ (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{a}$$

а новая функция Гамильтона

$$K = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$$

будет постоянной. Так как функция Гамильтона как содержащая согласно (46—6) слагаемое V, определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, то в выражении (7″) можно отбросить K, и таким путем придем к уравнению

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H(q, p, t) = 0.$$

В силу соотношений (7) это уравнение можно переписать в форме

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_s}\right) = 0, \tag{b}$$

что является не чем иным, как уравнением Гамильтона—Якоби для функции F_2. Так как в данном случае, согласно выражений (а), должно быть

$$F_2 = F_2(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s), \tag{c}$$

то производящая функция с точностью до несущественной аддитивной постоянной совпадает с полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби S и, следовательно, является главной функцией Гамильтона.

Но в таком случае интегралы канонической системы для старых переменных q_r, p_r проще всего получить, пользуясь теоремой Якоби и составляя интегралы (46—13), ибо

это требует только дифференцирования функции (c) по ее аргументам. Это будут интегралы

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \beta_r, \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r \; (r = 1, 2, \ldots, s),$$

где $S = F_2$. Если же интегралы канонической системы искать путем рассматриваемого перехода к циклическим координатам, то после получения полного интеграла (c) уравнения Гамильтона—Якоби нужно еще проделать следующие операции: из формул (7), (7′) находим выражения старых координат и импульсов через новые, затем, пользуясь равенством (7″), определяем новую функцию Гамильтона $K = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$; далее составляем канонические уравнения

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial K}{\partial \alpha_r} = \beta_r \; (r = 1, 2, \ldots, s),$$

где все β_r окажутся выраженными через α_r и численные коэффициенты; наконец, подставляя получаемые отсюда значения

$$Q_r = \beta_r t + \gamma_r,$$

а также значения импульсов $P_r = \alpha_r$ в выражения для старых координат и импульсов, находим решение задачи.

Таким образом, применение метода Якоби оказывается предпочтительнее применения вышеуказанного метода преобразования к циклическим координатам.

Ж. ТЕОРИЯ УДАРА

§ 49. Удар материальной точки

1. Основные понятия и основное уравнение удара. Во всем предыдущем изложении механики мы предполагали, что за малые промежутки времени элементы движения тел могут изменяться лишь на малые величины. Однако при встрече движущихся тел с какой-либо преградой или между собой можно видеть, что за весьма малый промежуток времени происходит резкое изменение скоростей точек тел. Такое явление называется *ударом.*

Так, при ударе шарика о стену его скорость до удара была направлена к стене, после же удара шарик начинает двигаться от стены, и, следовательно, его скорость резко меняется.

Продолжительность удара τ весьма мала; как показывает опыт, она измеряется тысячными, а иногда даже десятитысячными долями секунды. Если приближенно считать, что за первую половину этого времени происходит торможение ударяющейся материальной точки, а за вторую — нарастание скорости до ее значения в конечный момент удара, то, например, при ударе точки о поверхность по нормали к ней, скорость до или после удара можно определить соотношением $v = \frac{1}{2} W_{ср}\tau$, где $W_{ср}$ — среднее ускорение точки. Отсюда следует, что во время удара значения ускорения будут изменяться от конечного значения или даже от нуля до весьма большой величины порядка $1/\tau$. Возникающие при ударе силы, как пропорциональные ускорению, будут иметь тот же характер изменения. А так как истинное значение этих весьма быстро меняющихся сил в каждый момент удара остается неизвестным, то при изучении явлений удара основные дифференциальные уравнения движения обычно заменяют общими теоремами динамики в конечной форме.

Основным уравнением удара для одной материальной точки называется уравнение, доставляемое теоремой о количестве движения:

$$m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}, \qquad (1)$$

где v — скорость точки в начальный момент удара, называемая скоростью до удара, v' — ее скорость в конечный момент удара или скорость после удара, а

$$S = \int_0^\tau F dt$$

— импульс равнодействующей сил, действующих на точку во время удара.

Если силу F вынести за знак интеграла средним значением, то

$$S = F_{ср}\tau.$$

Для обычных сил, таких как сила тяжести, сила всемирного тяготения и т. д., произведение силы на τ будет величиной малой, ибо эти силы за весьма малый промежуток времени могут дать лишь тоже весьма малое изменение количества движения точки. Поэтому при изучении удара пренебрегают действием обычных сил и учитывают только те силы, которые появляются при ударе и которые имеют указанный порядок $1/\tau$. Эти силы будем называть *ударными силами,* а их импульсы за время удара — *ударными импульсами.*

Тогда основное уравнение удара (1) говорит о том, что *изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу.*

Весьма малая продолжительность удара позволяет в случае необходимости рассматривать явление удара как мгновенное, происходящее в некоторый момент времени.

2. Теорема о моменте количества движения. Из опыта известно, что всякая испытывающая удар система не успевает за время удара изменить заметно свое положение. Это легко показать на примере удара одной материальной точки.

Применим уравнение (1) не ко всей продолжительности удара, а к промежутку времени от начала удара до произвольного $t<\tau$. Тогда $v'=\dot{r}'$ будет переменной скоростью точки при ударе, S — переменным импульсом, и уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{dr'}{dt} = v + \frac{1}{m}S.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до τ, получаем

$$r' - r = v\tau + \frac{1}{m}\int_0^\tau S dt = v\tau + \frac{1}{m}S_{ср}\tau,$$

где r — радиус-вектор точки в начальный момент удара, а r' — в конечный момент. Правая часть этого равенства есть

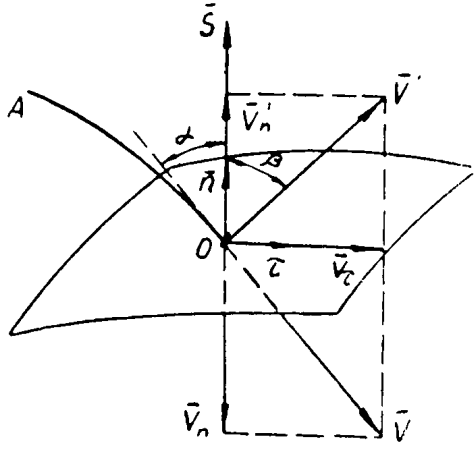
величина малая порядка τ. Пренебрегая ею, можем считать $r' = r$, то есть можем пренебречь перемещением точки за время удара.

Этот результат позволяет легко получить теорему о моменте количества движения точки при ударе. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (1) векторно слева на радиус-вектор точки r, которым определяется ее положение при ударе; получим

$$r \times mv' - r \times mv = r \times S, \qquad (2)$$

то есть, *изменение момента количества движения точки относительно некоторого центра за время удара равно моменту ударного импульса относительно того же центра.*

3. Удар точки о неподвижную поверхность и коэффициент восстановления. Пусть материальная точка, двигаясь по своей траектории AO (фиг. 187), в не-



Фиг. 187

который момент времени ударяется о неподвижную поверхность в точке О. Вследствие удара возникает ударная реактивная сила, импульс которой приведет к конечному изменению скорости точки согласно основному уравнению удара.

$$mv' - mv = S. \qquad (1)$$

Будем считать поверхность идеально гладкой; тогда импульс, как и реакция связи, будет направлен по нормали к поверхности в ту сторону, откуда пришла точка. Проектируя уравнение (1) на направленную в сторону импульса

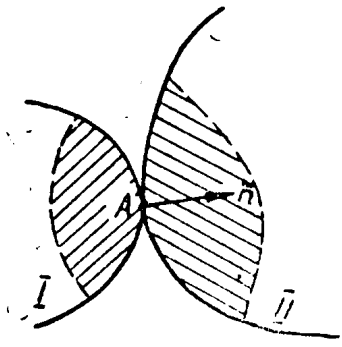
нормаль n и касательную к поверхности τ, лежащую в плоскости, проходящей через нормаль и вектор v, получим:

$$\left.\begin{aligned} mv_n' - mv_n &= S, \\ v_\tau' - v_\tau &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Второе уравнение (а) дает $v_\tau' = v_\tau$; следовательно, при ударе точки об идеально гладкую поверхность касательная составляющая скорости не изменяется. При изучении удара элементы движения тел до удара считаются известными, поэтому будет известна и составляющая v_τ' скорости точки после удара.

Иначе обстоит дело с нормальной скоростью v_n', ибо в первом уравнении (а) имеется еще одна неизвестная — импульс S. С подобной картиной приходится встречаться и в других задачах — всегда в уравнения удара будет входить одна лишняя неизвестная величина.

Для получения недостающего уравнения Ньютон ввел гипотезу о так называемом коэффициенте восстановления, представление о котором можно получить, обратившись к физической картине удара.



Фиг. 188

Пусть при ударе двух тел друг о друга точка A (фиг. 188) будет точкой соприкосновения тел при ударе. В окрестности этой точки каждое тело испытывает деформацию (области деформации показаны штриховкой), и кинетическая энергия системы, по мере возрастания деформации в первой половине удара, будет переходить в потенциальную энергию деформации. После того как деформация достигнет наибольшей возможной величины, тела под действием сил упругости начнут распрямляться и накопленная потенциальная энергия начнет переходить обратно в кинетическую энергию. Если по окончании удара деформация полностью исчезнет, то кинетическая энергия тоже полностью восстановится; такой удар называется *абсолютно упругим*. Другим крайним случаем является тот, когда полученная телами максимальная деформация полностью остается, и тела, нисколько не отталкиваясь друг от друга, движутся совместно, по крайней мере в направлении общей нормали к поверхностям тел в точке A; такой удар называется *абсолютно неупругим*.

Предполагая, что поверхности тел идеально гладкие, интенсивность рассмотренного физического эффекта можно оце-

нить по относительной нормальной составляющей скорости точки A одного тела по отношению к точке A другого тела. Пусть $\boldsymbol{n}$ общая нормаль к телам в точке A. Обозначим через $\boldsymbol{u}$ скорость точки A тела I, через U — скорость той же точки, принадлежащей телу II. Проектируя эти скорости на нормаль $\boldsymbol{n}$, найдем, что относительная нормальная составляющая скорости точки A первого тела до удара есть $u_n - U_n$, а после удара $u_n' - U_n'$. Так как в начальный момент удара тела сближаются, а в конечный — удаляются друг от друга, то эти составляющие имеют противоположные знаки. Ньютон и предложил называть *коэффициентом восстановления* положительную величину ε, определяемую отношением

$$\varepsilon = -\frac{u_n' - U_n'}{u_n - U_n}. \tag{3}$$

При абсолютно упругом ударе, вследствие полного восстановления после удара кинетической энергии системы, должен восстановиться и модуль относительной нормальной скорости точки A; поэтому

$$|u_n' - U_n'| = |u_n - U_n|,$$

откуда имеем $\varepsilon=1$. Если же удар является абсолютно неупругим, то относительная нормальная скорость точки A должна исчезнуть, то есть $u_n' - U_n' = 0$; поэтому в этом случае $\varepsilon = 0$. Реальные тела более или менее упруги, и удар всегда будет сопровождаться сохраняющейся в телах некоторой остаточной деформацией; поэтому для них $0<\varepsilon<1$.

Таким образом, при ударе двух тел крайние случаи абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара могут рассматриваться как идеализированные, в которых приближенно можно считать все возникшие деформации полностью исчезающими после удара или наоборот — полностью остающимися. Следует ,однако, заметить, что могут иметь место такие явления, которые, как мы увидим далее, носят характер абсолютно неупругого удара.

Возвращаясь к нашей задаче, примем материальную точку за первое тело, неподвижную поверхность — за второе. Тогда в формуле (3) нужно положить $U_n = U_n' = 0$, скорость же $\boldsymbol{u}$. совпадает со скоростью точки; получим

$$v_n' = -\varepsilon v_n. \tag{b}$$

Это равенство позволяет определить скорость v_n', а из первого уравнения (а) найдется ударный импульс S.

Угол скорости $\boldsymbol{v}$ с нормалью к поверхности обозначим через α, а скорости $\boldsymbol{v}'$ — через β; назовем эти углы соответственно углами падения и отражения (фиг. 187). Из чертежа за-

дачи видим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\tau}{|v_n|};\ \operatorname{tg}\beta = \frac{v_\tau}{|v_n'|}.$$

Отсюда, согласно (b), находим:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{|v_n'|}{|v_n|} = \varepsilon,$$

то есть коэффициент восстановления равен отношению тангенса угла падения к тангенсу угла отражения. При абсолютно упругом ударе будем иметь $\alpha = \beta$, при абсолютно неупругом $\beta = \frac{\pi}{2}$, а при обычном упругом ударе $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

4. Опытное определение коэффициента восстановления. Как мы видели, значение коэффициента восстановления зависит от физических свойств ударяющихся тел. Поэтому обычно этот коэффициент определяется опытным путем.

Пусть некоторый шарик свободно падает с высоты h, ударяясь о плиту с горизонтальной поверхностью. Скорость шарика в момент удара по теореме кинетической энергии будет $v = \sqrt{2gh}$. Отскочив от плиты со скоростью v', шарик поднимется до высоты h', связанной с v' той же формулой $v' = \sqrt{2gh'}$. Отношение этих скоростей

$$\varepsilon = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \qquad (4)$$

и даст значение коэффициента восстановления, отвечающее материалу ударяющихся тел.

Опыт показывает, что значение ε зависит также от скорости падения шарика или той высоты, с которой он падает. Поэтому значения коэффициента ε, которые можно найти в технических справочниках, даются средним значением для различных диапазонов скоростей. Например, для скоростей, близких к $v = 2{,}8$ *м/сек* эти значения будут: для стекла $\varepsilon = \frac{15}{16}$, для слоновой кости $\varepsilon = \frac{8}{9}$, для стали и пробки $\varepsilon = \frac{5}{9}$, для дерева $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Пример. С высоты $H = 300$ *м* опущен без начальной скорости теннисный мяч. Ударившись о грунт, он отскочит, затем снова упадет, опять отскочит и т. д. Определить полное время всех этих движений мяча, если коэффициент восстановления равен 3/4. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Время первого падения мяча есть

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}};$$

такой же формулой будут определяться и времена всех последующих отскоков или падений мяча, то есть

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}},\ t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}},\ \ldots.$$

где $h_1, h_2, \ldots$ — высоты очередных подскоков мяча. Тогда полное время всех этих движений будет

$$T = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + \ldots = \sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} + \ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{2H}{g}}\left\{1 + 2\sqrt{\frac{h_1}{H}} + 2\sqrt{\frac{h_2}{H}} + \ldots\right\}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left\{1 + 2\left(\sqrt{\frac{h_1}{H}} + \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\sqrt{\frac{h_1}{H}} + \sqrt{\frac{h_3}{h_2}}\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\sqrt{\frac{h_1}{H}} + \ldots\right)\right\}.$$

Так как внутри скобки каждый из корней, согласно (4), равен ε, то отсюда получаем

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\{1 + 2(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots)\}.$$

В круглых скобках стоит сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член и знаменатель равны ε. Поэтому

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Подставляя численные значения величин, находим:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9{,}81}}(1 + 6) \approx 7{,}7 \cdot 7 \approx 54 \text{ сек}.$$

Теоремы Карно. Эти теоремы касаются изменения кинетической энергии материальной точки за время удара, возникающего при мгновенном наложении или мгновенном снятии идеальной абсолютно неупругой связи. В обоих случаях будем исходить из основного уравнения удара

$$m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S} \qquad (1)$$

и тождества

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v'^2 - v^2). \qquad (a)$$

Рассмотрим сначала случай мгновенного наложения связи. В этом случае в уравнении (1) $\boldsymbol{S}$ будет ударным импульсом реактивной силы, мгновенно возникающей при наложении связи. Так как связь идеальна, то $\boldsymbol{S}$ будет направлен по нормали к ней. После удара точка будет двигаться согласно со связью, откуда следует, что вектор $\boldsymbol{v}'$

перпендикулярен $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}' = 0$. Поэтому, умножая уравнение (1) скалярно на $\boldsymbol{v}'$, получаем

$$\boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = 0.$$

Вычитая из разности квадратов скоростей равную нулю удвоенную левую часть последнего уравнения, находим:

$$\boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2 - 2\boldsymbol{v}'^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = -(\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{v}'^2 - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}') = \\ = -(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')^2.$$

Подставляя это значение в (а) и меняя знак, имеем:

$$\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - \frac{m\boldsymbol{v}'^2}{2} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')^2. \qquad (5)$$

Разность $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$ называется *потерянной скоростью* точки. Получили первую теорему Карно:

При мгновенном наложении идеальной абсолютно неупругой связи потерянная кинетическая энергия материальной точки равна кинетической энергии, которую имела бы точка, двигаясь с потерянной скоростью.

В случае мгновенного снятия связи нормальная реакция тоже мгновенно исчезает, и точка испытывает удар в направлении, противоположном действовавшей реакции. Так как согласной со связью была скорость $\boldsymbol{v}$ точки до удара, то вектор $\boldsymbol{v}$ перпендикулярен импульсу $\boldsymbol{S}$. Поэтому, умножая уравнение (1) скалярно на $\boldsymbol{v}$, получим

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}^2 = 0.$$

Снова вычитая удвоенную левую часть этого равенства из разностей квадратов скоростей, имеем:

$$\boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2 - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' + 2\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}'^2 + \boldsymbol{v}^2 - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = \\ = (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})^2.$$

Подстановка этого значения в (а) дает

$$\frac{m\boldsymbol{v}'^2}{2} - \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v})^2. \qquad (6)$$

Разность $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ называется *приобретенной скоростью*. Равенство (6) выражает вторую теорему Карно:

При мгновенном снятии идеальной абсолютно неупругой связи приобретенная кинетическая энергия материальной точки равна кинетической энергии, которую имела бы точка, двигаясь с приобретенной скоростью.

§ 50. Удар системы и твердых тел

1. Основные теоремы для удара системы. Применяя основное уравнение удара (49—1) для каждой точки системы, получим:

$$m_i \boldsymbol{v}_i' - m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{S}_i^{(e)} + \boldsymbol{S}_i^{(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\boldsymbol{S}_i^{(e)}$ и $\boldsymbol{S}_i^{(i)}$ — внешний и внутренний ударные импульсы, действующие на данную точку. Суммируя эти уравнения по всем точкам системы, будем иметь:

$$\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i' - \Sigma m_i \boldsymbol{v}_i = \Sigma \boldsymbol{S}_i^{(e)} + \Sigma \boldsymbol{S}_i^{(i)}.$$

Так как $\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{Q}$ есть количество движения системы, а по основному свойству внутренних сил $\Sigma \boldsymbol{S}_i^{(i)} = 0$, то это равенство можно переписать в виде

$$\boldsymbol{Q}' - \boldsymbol{Q} = \Sigma \boldsymbol{S}_i^{(e)}. \tag{1}$$

Получили теорему о количестве движения системы при ударе:

Изменение количества движения системы за время удара равно геометрической сумме всех внешних ударных импульсов.

Как и в динамике, этой теореме можно придать вид уравнения удара для центра масс, полагая $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C$; получим

$$M(\boldsymbol{v}_C' - \boldsymbol{v}_C) = \Sigma \boldsymbol{S}_i^{(e)}. \tag{2}$$

Таким образом, *для центра масс справедливо основное уравнение удара для одной точки, если считать, что вся масса системы сосредоточена в центре масс, и он находится под действием ударного импульса, равного геометрической сумме всех внешних ударных импульсов.*

Применяя затем теорему о моменте количества движения при ударе в каждой точке системы, получим согласно (49—2)

$$\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(e)} + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(i)} \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Складывая эти уравнения, будем иметь

$$\Sigma \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i' - \Sigma \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \Sigma \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(e)} + \Sigma \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(i)}.$$

По основному свойству внутренних сил $\Sigma \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(i)} = 0$, а $\Sigma \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{K}$ есть момент количества движения системы; поэтому приходим к равенству

$$\boldsymbol{K}' - \boldsymbol{K} = \Sigma \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(e)}, \tag{3}$$

выражающему теорему моментов для удара системы:

Изменение момента количества движения системы относительно какого-либо центра за время удара равно геометрической сумме моментов внешних ударных импульсов относительно того же центра.

Аналогично можно обобщить на систему теоремы Карно. При мгновенном наложении на систему идеальных неупругих связей для каждой точки системы согласно (49—5) будем иметь

$$\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{m_i v_i'^2}{2} = \frac{m_i}{2}(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i')^2.$$

Суммирование по всем точкам системы дает

$$T - T' = \frac{1}{2}\sum m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i')^2, \qquad (4)$$

где $T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$ — кинетическая энергия системы. Получили первую теорему Карно:

При мгновенном наложении идеальных абсолютно неупругих связей потерянная кинетическая энергия системы равна кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.

При мгновенном снятии идеальных неупругих связей, записывая равенство (49—6) для каждой точки системы и складывая, найдем:

$$T' - T = \frac{1}{2}\sum m_i (\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{v}_i)^2, \qquad (5)$$

что выражает вторую теорему Карно:

При мгновенном снятии идеальных абсолютно неупругих связей приобретенная кинетическая энергия системы равна кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с приобретенными скоростями.

Теоремы Карно играют важную роль в приложениях механики. Так, первая теорема Карно позволяет оценивать потери кинетической энергии в машинах. Большое значение эта теорема имеет в гидравлике, где она применяется под именем теоремы Борда: при ударе воды о лопатки, струй между собой и т. д. мы получаем движение воды в согласии с новои наложенной связью; такой удар является абсолютно неупругим и поэтому всякий раз будет иметь место потеря кинетической энергии жидкости.

Разрыв снаряда можно рассматривать как мгновенное снятие абсолютно неупругой связи: следовательно, в согласии со второй теоремой Карно произойдет возрастание кинетической энергии системы, составленной из осколков снаряда. Если при подъеме груза краном, стоящим на рельсах, произойдет обрыв троса или груз внезапно отцепится,

то это явление тоже будет мгновенным снятием абсолютно неупругой связи; определяемое второй теоремой Карно возрастание кинетической энергии проявится в том, что кран подпрыгивает на рельсах и, падая обратно, может даже поломать свои колеса или сойти с рельс.

2. Принципы Даламбера и Даламбера-Лагранжа в теории удара. Действующие на точки системы ударные импульсы, вместо деления их на внешние и внутренние, можно разделить на импульсы активных ударных сил $\boldsymbol{S}_i^{(a)}$ (активные ударные импульсы) и импульсы ударных реакций $\boldsymbol{S}_i^{(r)}$ (пассивные ударные импульсы). Тогда основное уравнение удара для какой-либо точки системы можно взять в виде

$$\Delta m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{S}_i^{(a)} + \boldsymbol{S}_i^{(r)} \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где вектор $\Delta m_i \boldsymbol{v}_i = m_i \boldsymbol{v}_i' - m_i \boldsymbol{v}_i$ — есть изменение количества движения точки при ударе. Прямо противоположный вектор $(-\Delta m_i \boldsymbol{v}_i)$ назовем инерционным ударным импульсом. Тогда, переписывая уравнения в виде

$$\boldsymbol{S}_i^{(a)} + \boldsymbol{S}_i^{(r)} + (-\Delta m_i \boldsymbol{v}_i) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(a)}$$

получаем принцип Даламбера для удара системы: *уравнениям удара системы материальных точек можно придать вид уравнений статики, считая, что активные и пассивные ударные импульсы уравновешиваются с инерционными ударными импульсами.*

Суммируя уравнения (а) по всем точкам системы, а затем производя такое же суммирование после предварительного умножения каждого уравнения векторно слева на радиусы-векторы точек $\boldsymbol{r}_i$, придем к уравнениям принципа Даламбера при ударе, записанным для системы в целом:

$$\sum \boldsymbol{S}_i^{(a)} + \sum \boldsymbol{S}_i^{(r)} + \sum (-\Delta m_i \boldsymbol{v}_i) = 0,$$

$$\sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(a)} + \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{S}_i^{(r)} + \sum \boldsymbol{r}_i \times (-\Delta m_i \boldsymbol{v}_i) = 0.$$

Эти уравнения говорят о равенстве нулю главного вектора и главного момента всех активных, пассивных и инерционных ударных импульсов.

Если каждое уравнение (а) умножить скалярно на виртуальное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_i$ точки, просуммировать по всем точкам системы и принять во внимание, что при идеальных связях

$$\sum \boldsymbol{S}_i^{(r)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

то придем к принципу Даламбера—Лагранжа при ударе

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{S}_i^{(a)} - \Delta m_i \boldsymbol{v}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

говорящему о том, что *при ударе сумма элементарных работ активных и инерционных ударных импульсов равна нулю на любом виртуальном перемещений системы.*

3. Уравнения Лагранжа II рода при ударе. Выражая в последнем уравнении скалярные произведения векторов через их проекции на оси координат, можно представить его в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N}(S_{\nu x}^{(a)} - \Delta m_\nu \dot{x}_\nu)\,\delta x_\nu = 0. \qquad \text{(a)}$$

Пусть система подчинена как до, так и после удара, κ голономным связям; тогда число независимых координат будет равно $s = N - \kappa$. Примем за независимые координаты некоторые обобщенные координаты q_r ($r = 1, 2, \ldots s$), считая декартовы координаты функциями от обобщенных.

Для преобразования уравнения (a) к независимым координатам подставим в это уравнение значения вариаций декартовых координат

$$\delta x_\nu = \sum_{r=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\,\delta q_r$$

и изменим порядок суммирования; получим:

$$\sum_{r=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{N} S_{\nu x}^{(a)}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} - \Delta\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\right)\delta q_r = 0. \qquad \text{(b)}$$

Выражение

$$\sum_{\nu=1}^{N} S_{\nu x}^{(a)}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = P_r$$

можно назвать *обобщенным ударным импульсом*, отвечающим координате q_r. Как мы видели при преобразовании общего уравнения механики к независимым координатам,

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_r} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r},$$

где T — кинетическая энергия системы. В итоге уравнение (b) можно переписать в виде

$$\sum_{r=1}^{s}\left(P_r - \Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\delta q_r = 0,$$

что в силу независимости вариаций δq_r дает

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = P_r (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (c)$$

Вспоминая, что

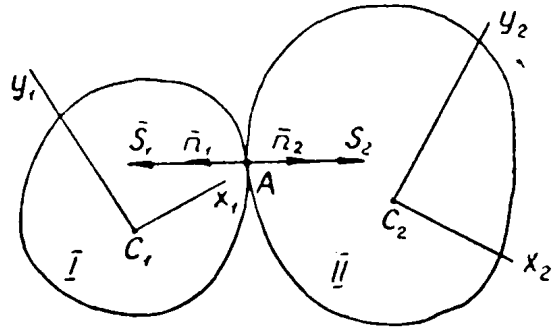
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = p_r$$

есть обобщенный импульс, можем эти уравнения переписать в виде

$$\Delta p_r = P_r (r = 1, 2, \ldots, s). \qquad (d)$$

Уравнение (c) или (d) являются уравнениями Лагранжа II рода при ударе, говорящими о том, что *приращения обобщенных импульсов за время удара равны соответствующим обобщенным ударным импульсам.*

4. Удар двух тел при плоско-параллельном движении. Пусть два тела, движущиеся параллельно неподвижной плоскости, в некоторый момент времени ударяются друг о друга. Считая, что движение центров масс C_1 и C_2 обоих тел происходит в одной плоскости, можем такой удар представить ударом двух плоских фигур, содержащих центры C_1 и C_2 (фиг. 189). Предполагая, что точка соуда-



Фиг. 189

рения A для каждой фигуры не является угловой точкой и что поверхности тел идеально гладкие, найдем, что реактивные импульсы $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$, действующие на каждое тело со стороны другого, будут направлены по общей нормали к фигурам внутрь каждой из них.

Возьмем связанные с фигурой I оси координат $C_1x_1y_1$ и с фигурой II — $C_2x_2y_2$. Введем следующие обозначения (в скобках указаны проекции векторов на связанные с данной фигурой оси):

$\boldsymbol{v}(v_x, v_y)$ — скорость центра масс тела I;

ω — угловая скорость вращения фигуры I;
M_1 — масса тела I;
I_1 — момент инерции тела I относительно оси C_1z_1, перпендикулярной плоскости фигуры;
$\boldsymbol{u}(u_x, u_y)$ — скорость точки соударения A, принадлежащей фигуре I;
$\boldsymbol{r}_1(x_1, y_1)$ — радиус-вектор этой точки;
$\boldsymbol{n}_1(l_1, m_1)$ — орт внутренней нормали к фигуре I в точке A.

Соответствующие величины для тела II обозначим через $\boldsymbol{V}(V_x, V_y)$, Ω, M_2, I_2 (относительно оси C_2z_2), $\boldsymbol{U}(U_x, U_y)$, $\boldsymbol{r}_2(x_2, y_2)$, $\boldsymbol{n}_2(l_2, m_2)$. Элементы движения фигур после удара обозначим штрихами.

В силу закона равенства действия и противодействия

$$S_1 = S_2 = S,$$

поэтому импульс, действующий на тело I, есть $\boldsymbol{S}_1 = S\boldsymbol{n}_1$, а на тело II есть $\boldsymbol{S}_2 = S\boldsymbol{n}_2$. Тогда векторные уравнения удара для центров масс тел согласно (2) будут

$$\begin{aligned} M_1(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) &= S\boldsymbol{n}_1; \\ M_2(\boldsymbol{V}' - \boldsymbol{V}) &= S\boldsymbol{n}_2. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Так как тело I вращается относительно оси C_1z_1, то момент количества движения первого тела будет равен $K_1 = K_{1z} = I_1\omega$; соответственно для второго тела $K_2 = I_2\Omega$. Момент ударного импульса $\boldsymbol{S}_1$ относительно C_1 есть

$$x_1S_{1y} - y_1S_{1x} = (x_1m_1 - y_1l_1)S = \lambda_1S,$$

где
$$\lambda_1 = x_1m_1 - y_1l_1; \qquad \text{(b)}$$

аналогично для тела II момент импульса $\boldsymbol{S}_2$ относительно C_2 будет равен λ_2S, где

$$\lambda_2 = x_2m_2 - y_2l_2. \qquad \text{(c)}$$

В итоге, проектируя уравнения (a) на связанные с каждой фигурой оси координат и составляя уравнения моментов при ударе согласно (3), получим следующие уравнения удара: для тела I

$$\left.\begin{aligned} M_1(v'_x - v_x) &= l_1S; \\ M_1(v'_y - v_y) &= m_1S; \\ I_1(\omega' - \omega) &= \lambda_1S; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

для тела II —

$$\left.\begin{aligned} M_2(V'_x - V_x) &= l_2S; \\ M_2(V'_y - V_y) &= m_2S; \\ I_2(\Omega' - \Omega) &= \lambda_2S. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Считая движение тел до удара известным, видим, что в этих шести уравнениях имеется семь неизвестных — шесть

элементов движения после удара и величина ударного импульса S. Поэтому для возможности решения задачи обратимся к формуле (49—3) для коэффициента восстановления

$$\varepsilon = -\frac{u'_n - U'_n}{u_n - U_n},$$

что можно еще переписать в виде

$$u'_n - U'_n + \varepsilon(u_n - U_n) = 0. \qquad \text{(f)}$$

Скорость точки A фигуры I может быть выражена по формуле кинематики

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1.$$

Проекции этой скорости на оси x_1, y_1 будут

$$u_x = v_x - \omega y_1, \qquad u_y = v_y + \omega x_1.$$

Нужно помнить, что в (f) проекции скоростей точек соударения тел берутся на одну определенную нормаль. Возьмем за такую нормаль $\boldsymbol{n}_2$; тогда

$$u_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_1 = -(l_1 u_x + m_1 u_y) =$$
$$= -\{l_1 v_x + m_1 v_y + (x_1 m_1 - y_1 l_1)\,\omega\},$$

что согласно (b) можно записать в виде

$$u_n = -(l_1 v_x + m_1 v_y + \lambda_1 \omega).$$

Аналогично для точки A, принадлежащей фигуре II, найдем

$$U_n = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}_2 = l_2 V_x + m_2 V_y + \lambda_2 \Omega.$$

Составляя разность

$$u_n - u'_n = l_1(v'_x - v_x) + m_1(v'_y - v_y) + \lambda_1(\omega' - \omega)$$

и заменяя скобки из уравнения удара (d), получим:

$$u_n - u'_n = \frac{S}{M_1}(l_1^2 + m_1^2) + \frac{S}{I_1}\lambda_1^2 = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{\lambda_1^2}{I_1}\right) S.$$

Точно так же, используя уравнения (e), для фигуры II будем иметь:

$$U'_n - U_n = \left(\frac{1}{M_2} + \frac{\lambda_2^2}{I_2}\right) S.$$

Складывая последние два равенства, находим:

$$u_n - U_n - (u'_n - U'_n) = KS, \qquad \text{(g)}$$

где

$$K = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{\lambda_1^2}{I_1} + \frac{\lambda_2^2}{I_2}.$$

Наконец, сложение равенств (f) и (g) дает

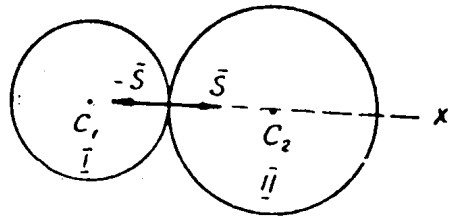
$$(1+\varepsilon)(u_n - U_n) = KS,$$

откуда

$$S = \frac{(1+\varepsilon)(u_n - U_n)}{K}.$$

Тем самым, зная ε, находим S, а тогда из уравнений (d) и (e) определятся все элементы движения тел после удара.

5. Центральный удар двух шаров. Пусть движущиеся поступательно два однородных шара ударяются друг о друга. Допустим, что в момент удара скорости их центров направлены по прямой, соединяющей эти центры; такой удар называется центральным. За общую ось x примем линию центров (фиг. 190). Так как линия действия ударного им-



Фиг. 190

пульса проходит через центр каждого шара, то этот импульс не вызовет ни вращения щара вокруг его центра, ни движения в направлении, перпендикулярном оси x. Поэтому для каждого шара будем иметь только одно уравнение удара для центра масс:

для шара I: $M_1(v' - v) = -S$,

а для шара II: $M_2(V' - V) = S$,

где v и V — алгебраические значения скоростей шаров до удара, v' и V' после удара. Складывая эти уравнения, получаем:

$$M_1(v' - v) + M_2(V' - V) = 0. \qquad \text{(a)}$$

В силу поступательного характера движения шаров точки их соударения имеют те же скорости, что и центры шаров; поэтому в формуле (49—3) для коэффициента восстановления можно положить $u_n = v$, $U_n = V$ и, освобождаясь от знаменателя, найти вторую зависимость для скоростей v' и V':

$$v' - V' + \varepsilon(v - V) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Из уравнений (a) и (b) исключим V': для этого умножим (b) на M_2 и сложим с (a); получим:

$$(M_1 + M_2)v' - (M_1 - \varepsilon M_2)v - (1+\varepsilon)M_2V = 0.$$

Прибавляя и отнимая в левой части произведение M_1V, можем переписать это уравнение в виде

$$(M_1 + M_2)\,v' - (M_1 - \varepsilon M_2)\,v - (M_2 + \varepsilon M_2 + M_1 - M_1)\,V = 0$$

или иначе:

$$(M_1 + M_2)\,v' - (M_1 - \varepsilon M_2)(v - V) - (M_1 + M_2)\,V = 0.$$

Отсюда находим:

$$v' = V + \frac{M_1 - \varepsilon M_2}{M_1 + M_2}(v - V). \qquad (c)$$

Аналогично получим:

$$V' = v + \frac{M_2 - \varepsilon M_1}{M_1 + M_2}(V - v). \qquad (d)$$

Формулы (c) и (d) определяют скорости шаров после удара; тем самым задача решена.

Если удар абсолютно неупругий, то $\varepsilon = 0$, и приводя оставшиеся члены к одному знаменателю, получим из (c) и (d) общую скорость шаров после удара:

$$v' = V' = \frac{M_1 v + M_2 V}{M_1 + M_2}.$$

Если же удар абсолютно упругий, то, полагая $\varepsilon = 1$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} v' &= V + \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}(v - V); \\ V' &= v + \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}(V - v). \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

При одинаковых массах шаров будем иметь отсюда

$$v' = V, \qquad V' = v,$$

то есть при абсолютно упругом центральном ударе шаров, имеющих равные массы, шары обмениваются своими скоростями.

Найдем потерю кинетической энергии шаров при ударе. Будем иметь:

$$T - T' = \frac{1}{2}\{M_1(v^2 - v'^2) + M_2(V^2 - V'^2)\}. \qquad (f)$$

На основании формулы (c)

$$v - v' = \left(1 - \frac{M_1 - \varepsilon M_2}{M_1 + M_2}\right)(v - V) = \frac{M_2}{M_1 + M_2}(1 + \varepsilon)(v - V),$$

$$v + v' = v + V + \frac{M_1 - \varepsilon M_2}{M_1 + M_2}(v - V) =$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2}[(M_1 + M_2)(v + V) + (M_1 - \varepsilon M_2)(v - V)].$$

Перемножение этих равенств дает

$$v^2 - v'^2 = \frac{M_2}{(M_1 + M_2)^2}(1 + \varepsilon)(v - V)[(M_1 + M_2)(v + V) + (M_1 - \varepsilon M_2)(v - V)].$$

Аналогично, используя (d), найдем:

$$V^2 - V'^2 = \frac{M_1}{(M_1 + M_2)^2}(1 + \varepsilon)(V - v)[(M_1 + M_2)(v + V) + (M_2 - \varepsilon M_1)(V - v)].$$

Подставляя два последних выражения в (f), получим:

$$T - T' = \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)^2}(1 + \varepsilon)(v - V)^2(M_1 - \varepsilon M_2 + M_2 - \varepsilon M_1)$$

или

$$T - T' = \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)}(1 - \varepsilon^2)(v - V)^2.$$

Эта формула и определяет потерю кинетической энергии. При абсолютно упругом ударе ($\varepsilon = 1$) $T - T' = 0$, то есть кинетическая энергия шаров полностью восстанавливается после удара; если же удар абсолютно неупругий ($\varepsilon = 0$), получим наибольшую потерю кинетической энергии, равную

$$T - T' = \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)}(v - V)^2.$$

Заметим еще, что формулы (c) и (d) будут справедливы не только для удара шаров, но и для центрального удара любых тел.

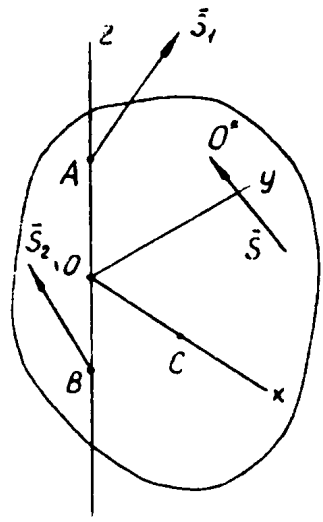
6. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Пусть на вращающееся вокруг оси тело подействовала ударная сила, импульс $\boldsymbol{S}$ которой можно считать приложенным в некоторой точке тела O* (фиг. 191). Тогда на опорах оси A и B возникнут реактивные ударные импульсы $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$.

Составим уравнения удара, заменяя действие опор импульсами $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$. Выберем связанные с телом оси координат так же, как и в соответствующей задаче динамики, принимая ось вращения за ось z и проводя ось x через центр масс тела C. Введем радиусы-векторы: $\boldsymbol{r}^*(x^*, y^*, z^*)$ — для точки O*, $\boldsymbol{r}_1(0, 0, a)$ — для опоры A, $\boldsymbol{r}_2(0, 0, b)$ — для опоры B. Тогда уравнение удара (2) для центра масс тела и

уравнение моментов при ударе (3) относительно начала координат запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} M(\boldsymbol{v}'_c - \boldsymbol{v}_c) &= \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2, \\ \boldsymbol{K}' - \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{S} + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{S}_2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Так как центр масс движется по окружности радиуса $OC = h$, то скорость $\boldsymbol{v}_c$, касательная к этой окружности, будет параллельна оси y; поэтому она будет иметь единственную проекцию $v_{cy} = h\omega$, где ω — угловая скорость вращения тела.



Фиг. 191

В общих формулах (39—7) для проекций кинетического момента нужно положить $p = q = 0$, $r = \omega$, поэтому будем иметь:

$$K_x = -E\omega, \qquad K_y = -D\omega,$$
$$K_z = C'\omega,$$

где D и E — центробежные моменты инерции, C' — момент инерции тела относительно оси вращения.

Обозначим через l, m, n направляющие косинусы ударного импульса $\boldsymbol{S}$; тогда его момент запишется в виде

$$\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{S} = S \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{\kappa} \\ x^* & y^* & z^* \\ l & m & n \end{vmatrix},$$

откуда

$$(\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{S})_x = \lambda S, \quad (\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{S})_y = \mu S, \quad (\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{S})_z = \nu S,$$

где

$$\lambda = y^* n - z^* m, \quad \mu = z^* l - x^* n, \quad \nu = x^* m - y^* l. \qquad \text{(b)}$$

Обозначая через ω' угловую скорость тела после удара, полагаем $\Delta\omega = \omega' - \omega$.

В итоге, проектируя уравнения (а) на оси x, y, z, придем к скалярным уравнениям удара:

$$\begin{aligned} 0 &= lS + S_{1x} + S_{2x}; \\ Mh\Delta\omega &= mS + S_{1y} + S_{2y}; \\ 0 &= nS + S_{1z} + S_{2z}; \\ -E\Delta\omega &= \lambda S - aS_{1y} - bS_{2y}; \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

$$-D\Delta\omega = \mu S + aS_{1x} + bS_{2x};$$
$$C'\Delta\omega = \nu S.$$

Последнее уравнение позволяет определить угловую скорость ω' после удара, если будет известен ударный импульс S. Остальные уравнения служат для определения проекций реактивных импульсов. При этом, аналогично задаче об отыскании проекций реакций опор при вращении тела вокруг оси, проекции S_{1z} и S_{2z} могут быть найдены из третьего уравнения (c) лишь при наличии какого-либо добавочного условия, боковые же реактивные импульсы полностью найдутся из остальных четырех уравнений.

Рассмотрим важный вопрос об условиях, при которых удар не передается на ось вращения, то есть при которых $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2 = 0$. В этом случае уравнения (c) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 = lS, & Mh\Delta\omega = mS, & 0 = nS \\ -E\Delta\omega = \lambda S, & -D\Delta\omega = \mu S, & C'\Delta\omega = \nu S. \end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

Из первого и третьего уравнений имеем $l = n = 0$, чему отвечает $m = \pm 1$. Следовательно, первым условием явится требование, чтобы линия действия ударного импульса была параллельна оси y, то есть перпендикулярна плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела.

Возьмем для определенности $m = 1$; из выражений (b) будем иметь

$$\lambda = -z^*, \quad \mu = 0, \quad \nu = x^*.$$

Тогда пятое уравнение (d) дает $D = 0$. В этом состоит второе условие.

Оставшиеся три уравнения (d) перепишутся в виде

$$Mh\Delta\omega = S, \quad E\Delta\omega = z^*S, \quad C'\Delta\omega = x^*S.$$

Деля второе и третье уравнения на первое, находим

$$x^* = \frac{C'}{Mh}, \quad z^* = \frac{E}{Mh}.$$

Точка плоскости (xz) с этими координатами называется *центром удара*. Получили третье условие, которое состоит в том, что линия действия ударного импульса должна проходить через центр удара.

Значения координат центра удара имеют вполне определенный смысл. Вспоминая задачу о физическом маятнике, видим, что координата x^* равна приведенной длине физического маятника, получающегося из данного тела, если ось вращения сделать горизонтальной. Вспоминая еще (см. § 38, п. 6), что координата главной точки оси z равна

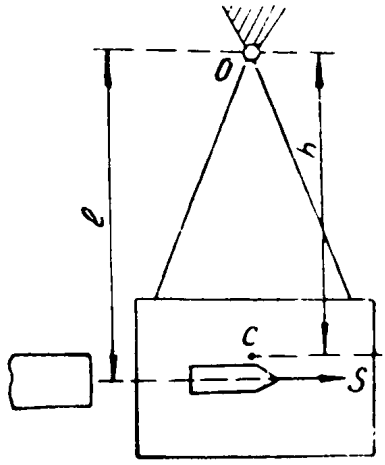
$$\frac{E}{\sum m_i x_i} = \frac{E}{Mx_c} = \frac{E}{Mh},$$

видим, что z^* совпадает с этой координатой; следовательно, центр удара лежит в плоскости $z = z^*$ пересекающей ось вращения в ее главной точке, то есть в точке, для которой эта ось является главной осью инерции.

Таким образом, при выполнении указанных трех условий удар не будет передаваться на ось вращения. Этот вывод имеет большое практическое значение. Так, при конструировании машин, подвергающихся при своей работе действию ударных нагрузок, стремятся к выполнению всех этих условий.

Если в кузнице неопытный человек возьмет молот и ударит им по наковальне, то удар больно отзовется на его ладонях, между тем как молотобоец, работая часами, не испытывает никакой заметной боли. Объясняется это тем, что ударная реакция наковальни стремится заставить молот вращаться вокруг оси, проходящей через руки молотобойца, последний же, в результате приобретенной сноровки, держит молот за такое место ручки, чтобы ударный импульс проходил как раз через центр удара молота; поэтому на оси вращения, то есть на руках, реактивный импульс появляться не будет.

В заключение заметим, что центр удара существует не для всякого вращающегося тела. Так, если центр масс тела лежит на оси вращения, то $h = 0$ и $x^* = z^* = \infty$.



Фиг. 192

7. Баллистический маятник. В качестве примера рассмотрим баллистический маятник, употребляющийся иногда для определения скорости снаряда при его вылете из канала орудия. Этот маятник представляет собой полый цилиндр, наполненный песком или глиной и имеющий возможность вращаться вокруг горизонтальной оси O (фиг. 192), перпендикулярной оси цилиндра. При выстреле снаряд застревает внутри цилиндра, а сам маятник приходит в колебательное движение; наблюдая угловую амплитуду α первого колебания, определяют скорость снаряда согласно нижеследующих рассуждений.

Составляя уравнение моментов, найдем, что угловая скорость маятника ω после удара будет определяться равенством

$$C'\omega = lS, \qquad \text{(а)}$$

где C' — момент инерции относительно оси O; l — расстояние линии действия ударного импульса от той же оси; S — модуль ударного импульса, действующего на маятник со стороны снаряда.

Скорость снаряда до удара есть искомая скорость вылета v, после удара она будет $l\omega$, ибо снаряд начнет двигаться вместе с маятником. Поэтому основное уравнение удара для снаряда получит вид:

$$ml\omega - mv = -S.$$

Умножая это уравнение на l и складывая с (a), получим

$$ml^2\omega - mlv + C'\omega = 0,$$

откуда

$$v = \frac{C' + ml^2}{ml}\,\omega. \tag{b}$$

Чтобы удар не передавался на ось вращения, необходимо, чтобы расстояние l совпадало с приведенной длиной физического маятника; поэтому

$$l = x^* = \frac{C'}{Mh},$$

где M — масса маятника. Отсюда

$$C' = Mhl,$$

что после подстановки в (b) дает

$$v = \frac{Mh + ml}{m}\,\omega. \tag{c}$$

Применим теперь теорему кинетической энергии

$$T - T_0 = A \tag{d}$$

к движению системы от положения в начальный момент после удара до положения крайнего отклонения. Будем иметь:

$$T = 0, \quad T_0 = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(C' + ml^2)\,\omega^2 = \frac{l}{2}(Mh + ml)\,\omega^2.$$

Работа A составится из работ сил веса маятника и снаряда в виде

$$A = -(Mh + ml)\,g\,(1 - \cos\alpha).$$

Подставляя эти значения в (d) и сокращая $Mh + ml$, имеем

$$\frac{l}{2}\,\omega^2 = g\,(1 - \cos\alpha) = 2g\,\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Заменяя в (c) ω этим значением, получим окончательную формулу для скорости снаряда

$$v = 2\frac{Mh + ml}{m}\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, ч. I. М., изд. «Наука», 1965.
2. То же, ч. 2, М., изд. «Наука», 1966.
3. Г. К. Суслов. Теоретическая механика, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
4. П. Аппель. Теоретическая механика, т. II, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.
5. Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики, ч. 2, Л.—М., Гос. изд. тех.-теор. лит., 1948.
6. Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Теоретическая механика, ч. 3, Л.—М., ОНТИ, 1934.
7. Н. В. Розе (под ред.). Теоретическая механика, ч. 2, Л., Гос. тех.-теор. изд., 1933.
8. Г. Голдстейн. Классическая механика, М., Гос. изд. тех.-теор., лит., 1957.
9. Н. Е. Жуковский. Теоретическая механика, М.—Л., Гос. изд. тех.-теор. лит., 1952.

ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ ТОМИЛОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, ч. 2

Томск, Изд. ТГУ, 1970 г. 317 с.

Редактор издательства **Л. Г. Мордовина**
Технический редактор **М. И. Раскевич**
Редактор **Г. П. Вагина**
Корректоры **Л. Л. Зайцева** и **М. И. Сваровская**

К302651. Сдано в набор 10/X-68 г. Подписано к печати 11/XI-70 г.
Формат 60×92$^{1}/_{16}$; печ. л. 19,7; бум. л. 9,8; усл.-изд. л. 19,7
Заказ 4700. Тираж 3000. Цена 1 р. 70 к.

Томск, Издательство ТГУ, проспект Ленина, 34.
Областная типография № 1 Управления по печати, ул. Советская, 47.